ZUR
SCHEITELPUNKTSBESTIMMUNG
DES PARABOLOIDS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

LANDESUNIVERSITÄT ROSTOCK

VORGELEGT VON

FRIEDRICH KOSSOW

AUS MARLOW.

ACAD. LAND. RAT. ROST.

ROSTOCK.

CARL BOLDT'SCHE HOFBUCHDRUCKEREI.

1903.

Referent: Herr Prof. Dr. **Staude**.

Einleitung.

Wenn die durch ihre allgemeine Gleichung in gewöhnlichen Koordinaten gegebene Fläche zweiter Ordnung das Paraboloid ist, hat sie stets einen bestimmten Scheitelpunkt. Die Aufgabe, die Koordinaten dieses Scheitelpunktes zu finden, ist bereits auf verschiedene Weise behandelt worden. Doch sind entweder nur die unentwickelten Gleichungen zwischen den Unbekannten angegeben, wie z. B. bei Plücker, oder es sind so komplizierte Ausdrücke erhalten, dass man sie nur schwer übersehen kann. Vor allem fehlt zu den bisher aufgestellten Formeln der Nachweis, dass die gefundenen Ausdrücke stets eindeutige endliche Werte für die Koordinaten des Scheitelpunktes liefern, so oft die Coefficienten der Flächengleichung die Bedingungen für das Paraboloid erfüllen. Nach einer neuen Methode ist es mir nun gelungen, diesen Anforderungen entsprechende Werte zu berechnen. Da es aber von Interesse sein dürfte, die früheren Methoden mit der neuen zu vergleichen, so will ich in kurzem die Betrachtungen wiedergeben, die wir in Plückers „System der Geometrie des Raumes“ (zweite Auflage 1852) und in den von Lindemann bearbeiteten Vorlesungen über Geometrie von Clebsch (zweiter Band I. Teil) finden. Im folgenden habe ich der Vollständigkeit halber der Koordinatenbestimmung des Scheitelpunktes des Paraboloids noch die analoge Berechnung für den Scheitelpunkt der Parabel vorangesetzt und die Aufstellung der Gleichung der Scheitellinie des parabolischen Cylinders folgen lassen.

§ 1.
Bezeichnung und Aufgabe.

I. Aus den in der allgemeinen Gleichung der Kurve zweiter Ordnung:

$$f = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

vorkommenden konstanten Grössen bilden wir die Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Wir setzen dann:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$$

und: $A_{33}' = a_{11} + a_{22}$.

Aus der allgemeinen Determinantentheorie erwähne ich für die Determinante dritten Grades folgende Sätze:

$$A\, a_{11} = A_{22}\, A_{33} - A_{23}^2$$
$$A\, a_{22} = A_{33}\, A_{11} - A_{13}^2$$
$$A\, a_{12} = A_{21}\, A_{33} - A_{31}\, A_{23},$$

ferner:

$$A = a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33}$$
$$0 = a_{12} A_{13} + a_{22} A_{23} + a_{32} A_{33}$$
$$0 = a_{11} A_{13} + a_{21} A_{23} + a_{31} A_{33}.$$

Setze ich nun $A_{33} = 0$, so nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

(1) $$a_{11}\, a_{22} = a_{12}^{\,2}$$

(2)
$$\begin{cases} A\, a_{11} = -A_{23}^{\,2} \\ A\, a_{22} = -A_{31}^{\,2} \\ A\, a_{12} = A_{12}\, A_{23} \end{cases}$$

(2′) $$A\, A_{23}' = -(A_{33}^{\,2} + A_{31}^{\,2})$$

(3)
$$\begin{cases} A = a_{13}\, A_{13} + a_{23}\, A_{23} \\ 0 = a_{12}\, A_{13} + a_{22}\, A_{23} \\ \quad \text{oder } A_{13} = -\dfrac{a_{22}}{a_{21}} A_{23} \\ 0 = a_{11}\, A_{13} + a_{21}\, A_{23} \\ \quad \text{oder } A_{23} = -\dfrac{a_{11}}{a_{21}} A_{13}. \end{cases}$$

II. Für die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung will ich folgende Abkürzungen gebrauchen:

(1) $$g = a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + 2\, a_{13}\, x\, z + 2\, a_{23}\, z\, y + 2\, a_{14}\, x + 2\, a_{24}\, y + 2\, a_{34}\, z + a_{44} = 0.$$

(2)
$$\begin{cases} g_1 = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14} \\ g_2 = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24} \\ g_3 = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34} \\ g_4 = a_{41}\, x + a_{42}\, y + a_{43}\, z + a_{44}. \end{cases}$$

(3) $$h = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2\, a_{14}\, x\, y + 2\, a_{13} x z + 2\, a_{23}\, y\, z.$$

(4)
$$\begin{cases} h_1 = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z \\ h_2 = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z \\ h_3 = a_{31}\, x + a_{23}\, y + a_{33}\, z. \end{cases}$$

Aus den in der Gleichung II, 1 vorkommenden Konstanten bilden wir die Determinante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Die 16 Unterdeterminanten dritten Grades bezeichnen wir mit A_{hi}, die 36 Unterdeterminanten zweiten Grades α_{hi}. Die Indices der letzteren sind[1] so zu verstehen, dass die 6 Kombinationen 2. Grades der 4 Zahlen 1, 2, 3, 4, nämlich 23, 31, 12, 14, 23, 34 der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind und die Indices h und i die Nummern der Zeilen- und Kolonnenkombination von α_{hi} bedeuten, z. B. $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$

Ferner setzen wir: $A_{44}' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$

$A_{44}'' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Wie für die Determinante dritten Grades, so sind auch hier folgende Formelreihen von Wichtigkeit:

$$A = a_{14} A_{14} + a_{24} A_{24} + a_{34} A_{34} + a_{44} A_{44}$$
$$0 = a_{13} A_{14} + a_{23} A_{24} + a_{33} A_{34} + a_{43} A_{44}$$
$$0 = a_{12} A_{14} + a_{22} A_{24} + a_{32} A_{34} + a_{42} A_{44}$$
$$0 = a_{11} A_{14} + a_{21} A_{24} + a_{31} A_{34} + a_{41} A_{44}$$

und

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} \\ A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

[1] Nach Baltzer, Determinantentheorie 4. Aufl. S. 9.

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} \\ A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = -A \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = -A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Setzen wir $A_{44} = 0$, so werden unsere Sätze lauten:

$$(5) \quad \begin{cases} A = a_{14} A_{14} + a_{24} A_{24} + a_{34} A_{34} \\ 0 = a_{13} A_{14} + a_{23} A_{24} + a_{33} A_{34} \\ 0 = a_{12} A_{14} + a_{22} A_{24} + a_{32} A_{34} \\ 0 = a_{11} A_{14} + a_{21} A_{24} + a_{31} A_{34}. \end{cases}$$

Benutzen wir die 3 letzten dieser Gleichungen, um

1) A_{34} und A_{24} durch A_{14}

2) A_{14} und A_{34} durch A_{24}

3) A_{24} und A_{14} durch A_{34} auszudrücken,

so erhalten wir

$$(6) \quad \begin{cases} 1) \quad A_{24} = \dfrac{a_{22}}{a_{12}} A_{14} \\ \qquad A_{34} = \dfrac{a_{33}}{a_{13}} A_{14} \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 2) \quad A_{14} = \dfrac{a_{11}}{a_{21}} A_{24} \\ \qquad A_{34} = \dfrac{a_{33}}{a_{23}} A_{24} \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} 3) \quad A_{14} = \dfrac{a_{11}}{a_{31}} A_{34} \\ \qquad A_{24} = \dfrac{a_{22}}{a_{32}} A_{34}. \end{cases}$$

Die zweite der allgemeinen Formelreihen nimmt folgende Form an:

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{11}A = - A_{14}^2 \\ a_{22}A = - A_{24}^2 \\ a_{33}A = - A_{34}^2 \\ a_{12}A = - A_{14}A_{24} \\ a_{23}A = - A_{24}A_{34} \\ a_{31}A = - A_{34}A_{14}. \end{cases}$$

$$(9')\qquad A_{44}'A = -(A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2).$$

Da $A_{44} = 0$ ist, folgt, dass seine adjungierte Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{44}^2 = 0.$$

Schreiben wir beide ausführlich, so können wir noch eine Formel herleiten, die schon Plücker durch die von ihm eingeführten Abkürzungen ausgedrückt, gefunden hat. (cf. Plücker: Geometrie des Raumes 1. Aufl. S. 57.)

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{44}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Also wird: $a_{12}A_{44} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

oder: $a_{21}a_{33} = a_{23}a_{31}.$

$$(10)\qquad a_{33} = a_{23} \cdot \frac{a_{31}}{a_{21}}.$$

Die zu lösenden Aufgaben lauten folgendermassen:

1) Die allgemeine Gleichung der Kurve zweiter Ordnung

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

stellt eine Parabel dar, wenn $A_{33} = 0$ aber A_{13} und A_{23} nicht beide Null sind, oder was nach (2′) auf dasselbe hinauskommt, wenn $A \neq 0$, $A_{33}' \neq 0$. Unter dieser Voraussetzung sind nun die Koordinaten des Scheitelpunktes zu bestimmen. Wir fassen dabei den Scheitelpunkt als den Punkt auf, dessen Normale durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Parabel geht.

2) Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

$$g = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

stellt ein Paraboloid dar, wenn $A_{44} = 0$, aber A_{14}, A_{24}, A_{34} nicht alle Null sind, oder was nach (9′) auf dasselbe hinauskommt, wenn $A_{44}' \neq 0$, $A \neq 0$. Unter diesen Bedingungen sind die Koordinaten des Scheitelpunktes zu berechnen. Der Scheitel ist der Punkt, dessen Normale durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Fläche geht.

3) Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Ordnung stellt einen parabolischen Cylinder dar, wenn $A = 0$, $A_{44} = 0$, $A_{44}' = 0$, alle Unterdeterminanten von A_{44} gleich Null, $A_{44}'' \neq 0$ und alle Unterdeterminanten von A ebenfalls nicht Null. Unter diesen Bedingungen ist die Gleichung der Scheitellinie aufzustellen. Die Scheitellinie definieren wir als die Grade, deren Normalebene durch die unendlich ferne Mittelpunktsaxe der Fläche geht.

§ 2.

Behandlung der Aufgabe durch Plücker.

Plücker gibt die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung in der Form:

$$\Omega = A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B'' x y + 2 B' x z + 2 B y z + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + D = 0$$

und führt dann folgende Abkürzungen ein, die durch die Determinanten des § 1 II ausgedrückt lauten:

$$\Theta = A_{11}, \quad \Theta_1 = A_{22}, \quad \Theta_2 = A_{33}, \quad \Theta_3 = A_{44}.$$
$$\Psi_{03} = -\alpha_{23}, \quad \Psi_{13} = -\alpha_{13}, \quad \Psi_{23} = -\alpha_{12}.$$
$$\Xi = \alpha_{33}, \quad \Xi_{22} = \alpha_{22}, \quad \Xi = \alpha_{11}.$$

Ausserdem ist: $\Omega = g$

und $\Omega_1 = h$ zu setzen.

Aus diesen Bezeichnungen ist folgende identische Gleichung hergeleitet:

$$\Psi_{03} \Psi_{13} + \Xi_2 \Psi_{23} = B'' \Theta_3.$$

Da nun für das Paraboloid $\Xi_2 = 0$ ist, so erhalte ich:

$$\Xi_2 = \frac{\Psi_{03} \cdot \Psi_{13}}{\Psi_{23}}.$$

In unserer Bezeichnung ist also:

$$\alpha_{33} = \frac{\alpha_{23} \cdot \alpha_{31}}{\alpha_{21}},$$

was wir in § 1 II (10) bewiesen haben.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, wendet Plücker folgende Methode an. Er setzt die Richtung der Normale im Scheitelpunkte des Paraboloids gleich der Durchmesserrichtung dieser Fläche und vereinigt die hieraus er-

haltenen beiden Gleichungen mit der des Paraboloids, nachdem er die letztere durch geeignete Umformungen auf lineare Form gebracht hat.

Zunächst gebe ich also die Berechnung der Durchmesserrichtung wieder.

Plücker sagt: Stellt die allgemeine Gleichung der Flächen-zweiter Ordnung:

$$(1)\quad g = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

eine Mittelpunktsfläche dar, so habe ich für die Berechnung dieses Mittelpunktes folgende 3 Gleichungen:

$$(2)\qquad \frac{dg}{dx} = 0; \qquad \frac{dg}{dy} = 0; \qquad \frac{dg}{dz} = 0$$

oder, wenn man die Differentialquotienten ausführt:

$$(3)\qquad \begin{cases} g_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ g_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ g_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Da für das Paraboloid $A_{44} = 0$ ist, so folgt aus diesen Gleichungen, dass der Mittelpunkt im Unendlichen liegt, d. h. dass die Durchschnittslinien je zweier der durch sie dargestellten drei Ebenen parallel sind. Die Richtung dieser Linien ist also die des Durchmessers des Paraboloids, nämlich derjenigen Richtung, nach welcher der Mittelpunkt unendlich weit gerückt ist. Die Bedingung $A_{44} = 0$ ist ferner damit gleichbedeutend, dass, wenn wir die Abkürzung § 1 II (3) berücksichtigen, gleichzeitig:

$$(4)\qquad \frac{dh}{dx} = 0, \qquad \frac{dh}{dy} = 0, \qquad \frac{dh}{dz} = 0,$$

was wir auch durch die folgende in λ und μ identische Gleichung ausdrücken können:

$$\lambda \frac{dh}{dx} + \mu \frac{dh}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \tag{5}$$

wo λ und μ zwei näher zu bestimmende Konstante bedeuten. Bestimmen wir nun die in (4) angeführten Differentialquotienten, so wird unter Beobachtung von § 1 II (4):

$$\begin{cases} h_1 = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z = 0 \\ h_2 = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z = 0 \\ h_3 = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Schreiben wir nun für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ bezw. α und β, so nehmen die Gleichungen diese Form an:

$$\begin{cases} h_1 = a_{11}\, \alpha + a_{12}\, \beta + a_{13} = 0, \\ h_2 = a_{21}\, \alpha + a_{22}\, \beta + a_{23} = 0, \\ h_3 = a_{31}\, \alpha + a_{32}\, \beta + a_{33} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen ergibt für α und β die Werte:

$$\alpha = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}; \quad \beta = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}},$$

durch welche dann die Durchmesserrichtung des Paraboloids gegeben ist. Statt der identischen Gleichung (5) hätten wir mit Hinblick auf (7) auch die folgende nehmen können:

$$\lambda h_1 + \mu h_2 + h_3 = 0. \tag{8}$$

Damit diese Gleichung bestehe, müssen, nachdem wir für h_1, h_2, h_3 ihre Werte eingesetzt haben, die Koefficienten

von α und β, sowie das konstante Glied verschwinden, wonach:

$$a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13} = 0,$$
$$a_{21}\lambda + a_{22}\mu + a_{23} = 0,$$
$$a_{31}\lambda + a_{32}\mu + a_{33} = 0.$$

Die drei Gleichungen geben für λ und μ dieselben Werte wie die drei Gleichungen (7) für α und β. Es ist also:

$$\lambda = \alpha = \frac{a_{13}}{a_{33}}; \quad \mu = \beta = \frac{a_{23}}{a_{33}}$$

oder infolge von § 1, II (10):

$$\lambda = \alpha = \frac{a_{21}}{a_{32}}; \quad \mu = \beta = \frac{a_{21}}{a_{31}}. \tag{9}$$

Diese Werte in Gleichung (8) eingesetzt, ergeben:

$$\frac{h_1}{a_{23}} + \frac{h_2}{a_{31}} + \frac{h_3}{a_{12}} = 0 \tag{10}$$

oder für h_1, h_2, h_3 werden die Differentialquotienten gesetzt:

$$\frac{\frac{dh}{dx}}{a_{23}} + \frac{\frac{dh}{dy}}{a_{31}} + \frac{\frac{dh}{dz}}{a_{12}} = 0.$$

Um in diese Gleichung wieder g statt h einzuführen, erhalten wir mit Bezug auf Gleichung (1):

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dx} - 2a_{14}; \quad \frac{dh}{dy} = \frac{dg}{dy} - 2a_{24}; \quad \frac{dh}{dz} = \frac{dg}{dz} - 2a_{34}$$

oder für $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dg}{dz}$ bezw. g_1, g_2, g_3 eingeführt:

$$\frac{g_1 - 2a_{14}}{a_{23}} + \frac{g_2 - 2a_{24}}{a_{31}} + \frac{g_3 - 2a_{34}}{a_{12}} = 0, \tag{11}$$

wodurch wir also der Gleichung (1) eine lineare Form gegeben haben.

Indem wir für α und β ihre Werte für x, y und z wieder einsetzen, können wir aus den Gleichungen (9) folgende Doppelgleichung ableiten:

$$a_{23}\,x = a_{31}\,y = a_{12}\,z. \tag{12}$$

Wir wenden uns jetzt der Richtungsbestimmung der Normale zu. Ihre Richtung in einem beliebigen Punkt der Fläche ist durch die folgenden beiden Gleichungen gegeben:

$$\alpha' = \frac{dg}{dx} : \frac{dg}{dz}, \quad \beta' = \frac{dg}{dy} : \frac{dg}{dz}.$$

Somit erhalten wir, indem wir die in (9) berechneten Durchmesserrichtungen der Richtung der Normale gleichsetzen, d. h. $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ machen, folgende Doppelgleichung:

$$a_{23}\frac{dg}{dx} = a_{31}\frac{dg}{dy} = a_{12}\frac{dg}{dz},$$

welche wieder gleichbedeutend ist mit:

$$a_{23}\,g_1 = a_{31}\,g_2 = a_{12}\,g_3. \tag{13}$$

Diese Gleichung besteht für den Scheitelpunkt gleichzeitig mit derjenigen der Fläche. Wie wir in (11) sehen, lässt sich diese auf den ersten Grad zurückführen, doch wollen wir der besseren Übersicht wegen noch einige Umformungen mit ihr vornehmen. Wir schreiben die Gleichung (11), welche ausdrückt, dass die durch die allgemeine Gleichung:

$$g = 0$$

gegebene Fläche insbesondere eine parabolische ist, zunächst in der Form:

$$\frac{g_1}{a_{23}} + \frac{g_2}{a_{31}} + \frac{g_3}{a_{12}} = 2\left(\frac{a_{14}}{a_{32}} + \frac{a_{24}}{a_{31}} + \frac{a_{34}}{a_{21}}\right) \tag{14}$$

und führen zur Vereinfachung der Rechnung folgende Abkürzung ein:

$$\frac{a_{14}}{a_{23}} + \frac{a_{24}}{a_{31}} + \frac{a_{34}}{a_{12}} = C\left(\frac{1}{a_{23}^{\,2}} + \frac{1}{a_{31}^{\,2}} + \frac{1}{a_{12}^{\,2}}\right).$$

Verbinden wir dann die Gleichungen (13) und (14), indem wir in (14) g_2 und g_3 durch g_1 ausdrücken, so erhalten wir:

$$\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{23}^{\,2}}\,g_1+\frac{\alpha_{32}\,g_1}{\alpha_{31}^{\,2}}+\frac{\alpha_{23}\,g_1}{\alpha_{12}^{\,2}}=2\left(\frac{\mathrm{a}_{14}}{\mathrm{a}_{23}}+\frac{\mathrm{a}_{24}}{\mathrm{a}_{31}}+\frac{\mathrm{a}_{34}}{\mathrm{a}_{12}}\right)$$

oder nach Anwendung der eingeführten Abkürzung:

$$\alpha_{23}\,g_1=2\,C.$$

Für g_2 und g_3 werde ich die analogen Werte

$$\alpha_{31}\,g_2=2\,C,$$
$$\alpha_{12}\,g_3=2\,C$$

berechnen können.

Es ergibt sich dann:

$$g_1=\frac{2\,C}{\alpha_{23}}$$
$$g_2=\frac{2\,C}{\alpha_{31}}$$
$$g_3=\frac{2\,C}{\alpha_{12}}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit x, y, z und addieren, so ist:

$$g_1\,x+g_2\,y+g_3\,z=2\,C\left(\frac{x}{\alpha_{23}}+\frac{y}{\alpha_{31}}+\frac{z}{\alpha_{12}}\right).$$

Mit Hülfe des § 1 II (2) kann ich die Gleichung der Fläche auch in dieser Weise schreiben:

$$y=x\,g_1+y\,g_2+z\,g_3+2\,(\mathrm{a}_{14}\,x+\mathrm{a}_{24}\,y+\mathrm{a}_{34}\,z)+\mathrm{a}_{44}=0.$$

Somit kommt zur Berechnung der Koordinaten des Scheitels:

$$2\,C\left(\frac{x}{\alpha_{23}}+\frac{y}{\alpha_{31}}+\frac{z}{\alpha_{12}}\right)+2\,\mathrm{a}_{14}\,x+2\,\mathrm{a}_{24}\,y+2\,\mathrm{a}_{34}\,z+\mathrm{a}_{44}=0,$$

oder, wenn wir für C seinen Wert einsetzen:

$$(15)\quad 2\left(\frac{a_{14}}{\alpha_{23}}+\frac{a_{24}}{\alpha_{31}}+\frac{a_{34}}{\alpha_{12}}\right)\left(\frac{x}{\alpha_{32}}+\frac{y}{\alpha_{31}}+\frac{z}{\alpha_{21}}\right)+$$
$$\left(\frac{1}{\alpha_{23}^{2}}+\frac{1}{\alpha_{31}^{2}}+\frac{1}{\alpha_{12}^{2}}\right)\left(2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}\right)=0.$$

Die Gleichung ist linear und gibt mit der Doppelgleichung (13) zusammengestellt, die drei Koordinaten des gesuchten Scheitels des Paraboloids. Setzen wir nun für $g_1\, g_2\, g_3$ die in § 1 II (2) ausgedrückten Werte in die Gleichungen (13) ein, so ergibt die Ausrechnung sehr komplizierte und unübersichtliche Werte für die Unbekannten. Die Nenner insbesondere genügen den in der Einleitung an sie gestellten Anforderungen in keiner Weise.

§ 3.

Behandlung der Aufgabe durch Clebsch-Lindemann.

Eine andere Bearbeitung dieses Stoffes findet sich in Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen über die Geometrie des Raumes". 1891, Seite 177. Wenn die hier berechneten Ausdrücke auch bedeutend klarer und kürzer sind als die, welche wir nach Ausrechnung der von Plücker angegebenen Gleichungen erhalten würden, so fehlt dem Nenner doch auch die gewünschte Eigenschaft. Er besteht hier nämlich aus einer Summe von neun Gliedern von der Form $A_{4k}\, A_{4i}\, a_{ik}$, woraus wir nicht ersehen können, wann er verschwindet und wann nicht.

Die eingeführten Abkürzungen und angewandten Determinantensätze decken sich hier natürlich meistens mit den jetzt üblichen. Nur die Unterdeterminanten zweiten Grades sind abweichend, nämlich mit B_{hi} bezeichnet.

Wir haben daher zu setzen:

$$B_{11} = a_{11}; \quad B_{22} = a_{22}; \quad B_{33} = a_{33},$$
$$B_{12} = a_{12}; \quad B_{23} = a_{23}; \quad B_{31} = a_{33} \text{ usw.},$$
$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = k = A_{44}',$$

wenn wir die Bezeichnungen des § 1 II anwenden.

Zur Berechnung der Koordinaten geht Clebsch von folgender Überlegung aus:

Er sagt, der Scheitelpunkt hat die Eigenschaft, dass seine Tangentialebene senkrecht steht zur Axe des Paraboloids. Stellen wir also die Gleichung einer zur Axe senkrechten Ebene auf, so muss, da diese das Paraboloid berühren soll, die Gleichung des Paraboloids in Ebenenkoordinaten erfüllt sein. Der Scheitelpunkt ist also definiert als Berührungspunkt der zur Axe des Paraboloids senkrechten Tangentialebene.

Die Gleichung einer beliebigen zur Axe des Paraboloids senkrechten Ebene ist:

$$(1) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

Soll diese das Paraboloid berühren, so muss die Gleichung in Ebenenkoordinaten erfüllt sein, daraus ergibt sich:

$$(2) \quad p = \frac{A_{11}\cos^2\alpha + A_{22}\cos^2\beta + A_{33}\cos^2\gamma + 2A_{12}\cos\alpha\cos\beta + \ldots}{2(A_{14}\cos\alpha + A_{24}\cos\beta + A_{34}\cos\gamma)}.$$

Da nun für die Richtungskosinus der Axe des Paraboloids folgende Gleichungen bestehen:

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma = 0,$$
$$a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma = 0,$$
$$a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma = 0,$$

so folgen hieraus mit einem Proportionalitätsfaktor diese 6 Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} k\cos^2\alpha = a_{11}, & k\cos\beta\cos\gamma = a_{23}, \\ k\cos^2\beta = a_{22}, & k\cos\gamma\cos\alpha = a_{31}, \\ k\cos^2\gamma = a_{33}, & k\cos\alpha\cos\beta = a_{32}, \\ k = a_{11} + a_{22} + a_{33} = A_{44}'. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in Gleichung (2) ein, so folgt:

$$(4)\qquad p = \frac{\Sigma\Sigma A_{ik}\, a_{ik}}{2\, A_{44}{}^{1}(A_{14}\cos\alpha + A_{24}\cos\beta + A_{34}\cos\gamma).}$$

Betrachten wir also den Scheitelpunkt $x\,y\,z$ als Berührungspunkt der Tangentialebene so haben wir:

$$(5)\qquad \begin{cases} \mu\, x = A_{11}\cos\alpha + A_{12}\cos\beta + A_{13}\cos\gamma - A_{14}\,p, \\ \mu\, y = A_{21}\cos\alpha + A_{22}\cos\beta + A_{23}\cos\gamma - A_{24}\,p, \\ \mu\, z = A_{31}\cos\alpha + A_{32}\cos\beta + A_{33}\cos\gamma - A_{34}\,p, \\ \mu = A_{41}\cos\alpha + A_{42}\cos\beta + A_{43}\cos\gamma - A_{44}\,p, \\ A_{44}\,p = 0. \end{cases}$$

Wenden wir hierauf die Sätze über Unterdeterminanten adjungierter Systeme, sowie auch wieder die Gleichungen (3), so erhalten wir nach Einsetzung des Wertes von p das Resultat:

$$\nu\, x = A\,(a_{11}\,a_{61} + a_{12}\,a_{62} + a_{13}\,a_{63} + a_{21}\,a_{51} + a_{22}\,a_{52} + a_{23}\,a_{53} + a_{31}\,a_{11} + a_{32}\,a_{12} + a_{33}\,a_{13}),$$

$$\nu\, y = A\,(a_{11}\,a_{61} + a_{12}\,a_{62} + a_{13}\,a_{63} + a_{21}\,a_{41} + a_{22}\,a_{42} + a_{23}\,a_{43} + a_{31}\,a_{21} + a_{32}\,a_{22} + a_{33}\,a_{23}),$$

$$\nu\, z = A\,(a_{11}\,a_{51} + a_{12}\,a_{52} + a_{13}\,a_{53} + a_{21}\,a_{41} + a_{22}\,a_{42} + a_{23}\,a_{43} + a_{31}{}^{2} + a_{32}{}^{2} + a_{33}{}^{2}),$$

$$\nu = 2\sum_{1}^{3}{}_{i}\sum_{1}^{3}{}_{k} A_{4\,i}\, A_{4\,k}\, a_{ik}.$$

Clebsch erhält dadurch, dass er die Unterdeterminanten zweiten Grades von A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} mit $A_{14,ik}$, $A_{24,ik}$, $A_{34,ik}$, $A_{44,ik}$ bezeichnet scheinbar einfachere Ausdrücke, die folgendermassen lauten:

$$\begin{aligned} \nu x &= A \Sigma\Sigma A_{44,ik} \cdot A_{14,ik} \cdot \\ \nu y &= A \Sigma\Sigma A_{14,ik} \cdot A_{24,ik} \cdot \\ \nu z &= A \Sigma\Sigma A_{44,ik} \cdot A_{24,ik} \cdot \\ \nu &= 2 \Sigma\Sigma A_{41\,i.} A_{4\,k.} A_{44,ik} \cdot \end{aligned}$$

Es bleibt also auch hier die Frage offen, ob aus den Bedingungen für das Paraboloid $A \neq 0$, $A'_{44} \neq 0$, $A_{44} = 0$ folgt, dass der gemeinsame Nenner von x, y, z von Null verschieden, d. h. dass wir stets endliche Werte für die Koordinaten x, y, z erhalten.

§ 4.

Neue Methode für die Scheitelpunktsbestimmung der Parabel.

Nach § 1 ist also folgende Aufgabe zu lösen:

1) Die allgemeine Gleichung der Curve zweiter Ordnung

$$f = a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

stellt eine Parabel dar, wenn $A_{33} = 0$, aber A_{13} und A_{23} nicht beide Null sind, oder was nach (2′) auf dasselbe hinauskommt, wenn $A \neq 0$, $A_{33}' = 0$. Unter dieser Voraussetzung sind nun die Koordinaten des Scheitelpunktes zu bestimmen. Wir fassen dabei den Scheitelpunkt als den Punkt auf, dessen Normale durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Parabel geht.

Als Gleichungen für die Tangente und Normale im Scheitelpunkte nehmen wir die folgenden:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \varrho A_{13} = 0. \tag{2}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - \varrho A_{23} = 0. \tag{3}$$

Schreiben wir (1) dann in dieser Form:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23} + a_{23})y + a_{33} = 0,$$

so erhalten wir mit Berücksichtigung von (1) und (2):

$$(a_{13} + \varrho A_{13})x + (a_{23} + \varrho A_{23})y + a_{33} = 0. \tag{4}$$

I. Berechnung der Werte mit den Nennern A_{13} und A_{23}.

Zunächst lässt sich in einfacher Weise aus den Gleichungen (2) und (3) ϱ bestimmen. Ich multipliziere (2) mit A_{13} und (3) mit A_{23} und addiere die hieraus erhaltenen Gleichungen. Mit Hinblick auf § 1, I (3) werden die Koeffizienten von x und y Null und das konstante Glied A, so dass:

$$A - \varrho (A_{13}^2 + A_{23}^2) = 0.$$

Infolge von § 1, I (2) ist aber:

$$A_{13}^2 + A_{23}^2 = -A_{33}' A.$$

Es folgt also:

$$\varrho = -\frac{1}{A_{33}'}. \tag{5}$$

a) Nehme ich für die Berechnung der Unbekannten die Gleichungen (3) und (4), so wird ihr gemeinsamer Nenner durch die Determinante dargestellt:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{13} + \varrho A_{13} & a_{23} + \varrho A_{23} \end{vmatrix}$$

Nach bekannten Sätzen aus der Determinantentheorie können wir sie in die folgenden beiden zerlegen:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Beachten wir, dass die erste Determinante A_{13} ist, dass ferner:

$$\varrho = -\frac{1}{A_{33}'}$$

und dass nach § 1, I (3) $A_{23} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} A_{13}$, so folgt:

$$A_{13} - \frac{A_{13}}{a_{21} A_{33}'} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 1 - \frac{a_{11}}{a_{21}} & \end{vmatrix}$$

wofür wir dann schreiben können:

$$A_{13} - \frac{A_{13}}{a_{21} A_{33}'} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & -a_{11} \end{vmatrix} = A_{13} - \frac{A_{13}}{A_{33}'}(-a_{11} - a_{22}).$$

Für den ganzen Nenner erhalten wir also den Wert $2 A_{13}$.

Die Bestimmung des Zählers von x aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} - \varrho A_{23} \\ a_{23} + \varrho A_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

oder ausgeführt:

$$a_{22} a_{33} - a_{23}^2 + \varrho^2 A_{23}^2.$$

Nun ist: $a_{22} a_{33} - a_{23}^2 = A_{11}$ nach § 1, I (2), woraus dann nach Einsetzung des Wertes von ϱ folgt, dass:

(6) $$x = \frac{A_{23}^2 + A_{11} A_{33}'^2}{2 A_{13} A_{33}'^2}.$$

Für y erhalte ich in derselben Weise als Zähler den Wert:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} - \varrho A_{23} \\ a_{13} + \varrho A_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Durch Entwickelung der Determinante wird diese lauten:

$$a_{21} a_{33} - a_{23} a_{13} + \varrho (a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) + \varrho^2 A_{13} A_{23}.$$

Da nun:

$$a_{21} a_{33} - a_{23} a_{13} = - A_{12}$$

und nach § 1, I (2) $A_{13} A_{23} = a_{12} A$, ferner $\varrho = - \frac{1}{A_{33}'}$, so wird:

$$(7) \qquad y = \frac{a_{12} A - A_{33}' (a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) - A_{33}'^2 A_{12}}{2 A_{13} A_{33}'^2}.$$

b) In gleichartiger Weise kann ich jetzt die Unbekannten aus den Gleichungen (2) und (4) berechnen. Hierdurch erhalte ich dann als gemeinsamen Nenner von x und y die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} + \varrho A_{13} & a_{23} + \varrho A_{23} \end{vmatrix}$$

welche, wie in der Betrachtung a) wieder zerfällt in die Ausdrücke:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix}$$

worin der erste Teil $- A_{23}$ ist, während wir im letzten nach § 1, I (3) $A_{13} = - \frac{a_{22}}{a_{12}} A_{23}$ zu setzen habe, woraus dann folgt:

$$- A_{23} + \varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ - \frac{a_{22}}{a_{12}} A_{23} & A_{23} \end{vmatrix} = - A_{23} - \frac{A_{23}}{a_{12} A_{33}'} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ - a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}$$

Nach Ausführung der angedeuteten Rechnungen erhalte ich in diesem Falle als gemeinsamen Nenner $-2A_{23}$

Als Zähler von x erhalte ich jetzt:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} - \varrho A_{13} \\ a_{23} + \varrho A_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

oder:

$$a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{23} + \varrho\,(a_{23}\, A_{13} - a_{13}\, A_{23}) + \varrho^2\, A_{13}\, A_{23}).$$

Wende ich hierauf dieselben Sätze, die ich bei der Betrachtung a) zur Berechnung von y benutzte, an, so wird:

$$(8) \qquad x = \frac{a_{12}\, A - A_{33}'\,(a_{23}\, A_{13} - a_{13}\, A_{23}) - A_{33}'^2\, A_{12}}{-2\, A_{23}\, A_{33}'^2}.$$

Bringen wir das negative Zeichen in den Zähler, so ist:

$$x = \frac{-a_{12}\, A + A_{33}'\,(a_{23}\, A_{13} - a_{13}\, A_{23}) + A_{33}'\, A_{12}}{2\, A_{23}\, A_{33}'^2}.$$

Für y stellt sich der Zähler in Form dieser Determinante dar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} - \varrho A_{13} \\ a_{13} + \varrho A_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Dies ausgeführt, ergibt:

$$a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2 + \varrho^2\, A_{13}^2,$$

dies ist aber:

$$A_{22} + \varrho^2\, A_{13}^2.$$

Danach wird:

$$y = \frac{+A_{13}^2 + A_{33}'^2\, A_{22}}{-2\, A_{33}'^2\, A_{23}}.$$

Eine dieser beiden Darstellungen ist stets brauchbar, da A_{13} und A_{23} nicht beide Null und A_{33} nicht 0 sein dürfen.

II. Berechnung der Werte mit dem Nenner $A \cdot A_{33}'$.

Wir können die Berechnung aber noch anders einrichten. Fassen wir nämlich alle drei Gleichungen für die Berechnung der Unbekannten zusammen, so wird eine Proportion zwischen x, y, 1 und ϱ und gewissen Determinanten dritten Grades bestehen. Diese bietet, wie wir sehen werden, den Vorteil, dass im Nenner diejenigen Ausdrücke stehen, die der Voraussetzung nach nicht Null sein dürfen.

Die bestehende Proportion ist:

$$x : y : 1 : \varrho =$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & -A_{13} \\ a_{22} & a_{23} & -A_{23} \\ a_{23}+\varrho A_{23} & a_{33} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & -A_{13} \\ a_{21} & a_{23} & -A_{23} \\ a_{13}+\varrho A_{13} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -A_{23} \\ a_{31}+\varrho A_{31} & a_{32}+\varrho A_{32} & 0 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}+\varrho A_{13} & a_{32}+\varrho A_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Durch das dritte Glied der rechten Seite dieser Proportion ist der gemeinsame Nenner von x und y gegeben, den wir zunächt berechnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -A_{23} \\ a_{31}+\varrho A_{31} & a_{32}+\varrho A_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwickele ich diese Determinante nach den Elementen der letzten Zeile, so nimmt sie den Wert an:

$$-(a_{31}+\varrho A_{31}) \begin{vmatrix} a_{12} & A_{13} \\ a_{22} & A_{23} \end{vmatrix} + (a_{32}+\varrho A_{32}) \begin{vmatrix} a_{11} & A_{13} \\ a_{21} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Die hierin vorkommenden Determinanten haben wir aber bei der Methode I schon berechnet, sie sind gleich $-A_{33}' A_{13}$ bezw. $A_{33}' A_{23}$.

Der ganze Nenner lautet also:

$$A_{33}' \{ (a_{31} + \varrho A_{31}) A_{13} + (a_{32} + \varrho A_{32}) A_{23} \}$$

woraus ich nach Ausführung der Klammern erhalte:

$$A_{33}' \{ a_{31} A_{13} + a_{32} A_{23} + \varrho (A_{13}^2 + A_{23}^2) \}.$$

Berücksichtige ich hier § 1 I (2) und den schon bei der Berechnung von ϱ erhaltenen Wert von $A_{13}^2 + A_{23}^2$, so ist dies gleich

$$A_{33}' \{ A + \varrho . - A_{33}' A \}$$

oder für ϱ seinen Wert gesetzt:

$$2 A A_{33}'.$$

Hieraus geht also hervor, dass der Nenner nie Null sein kann, also dass x und y stets endliche Grössen sein müssen. Demnach gibt es für die Parabel stets einen endlichen Scheitelpunkt. Gehen wir jetzt zur Berechnung der etwas komplizierten Ausdrücke der Zähler, so ist der von x darstellbar durch diese Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & -A_{13} \\ a_{22} & a_{23} & -A_{23} \\ a_{23} + \varrho A_{23} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

oder wieder nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt:

$$-(a_{23} + \varrho A_{23}) \begin{vmatrix} a_{13} & A_{13} \\ a_{23} & A_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & A_{13} \\ a_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Während wir die erste vollständig berechnen müssen, können wir für die zweite dieser Determinanten $-a_{33} A_{13} A_{33}'$ schreiben, es wird dann:

$$-(a_{23} + \varrho A_{23}) a_{13} A_{23} + (a_{23} + \varrho A_{23}) a_{23} A_{13} - a_{33} A_{13} A_{33}'.$$

Setzen wir dann für ϱ seinen Wert und führen die Multiplikation weiter aus, so ergibt sich:

$$\frac{+a_{13}A_{23}^{\,2} - a_{23}A_{13}A_{23} - a_{23}A_{33}'(a_{13}A_{23} - a_{23}A_{13}) - a_{33}A_{13}A_{33}'^{2}}{A_{33}'}.$$

Ziehen wir die beiden ersten Glieder des Zählers zusammen, indem wir nach § 1, I (2) $A_{23}^{\,2}$ und $A_{13}A_{23}$ durch $-a_{11}A$ bezw. $a_{12}A$ ersetzen, so erhalten wir für x.

$$(10)\quad x = \frac{-A(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{13}A_{23} - a_{23}A_{13})A_{33}' - a_{33}A_{13}A_{33}'^{2}}{2\,A\,A_{33}'^{2}}$$

Denselben Wert für x hätte ich auch nach Methode I herleiten können, wenn ich nämlich die Gleichungen (6) und (8) mit a_{13} resp. mit a_{23} multipliziere und sie dann addiere. Zur Kontrolle will ich dies jetzt ausführen:

$$(6a):\quad 2\,a_{13}A_{13}A_{33}'^{2}x = -a_{11}a_{13}A + a_{13}A_{11}A_{33}'^{2}$$

$$(8a):\quad 2\,a_{23}A_{23}A_{33}'^{2}x = -a_{12}a_{23}A - a_{23}(a_{13}A_{23} - a_{23}A_{13})A_{33}' + a_{23}A_{13}A_{33}'^{2}$$

$$2(a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23})A_{33}'^{2}x = -A(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{13}A_{23} - a_{23}A_{13})A_{33}' + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{13})A_{33}'^{2}$$

Nach § 1 I (3) erhalten wir als Coefficienten von x $2\,A\,A_{33}'^{2}$, bis auf das letzte Glied der rechten Seite stimmen also alle Glieder mit denen der Gleichung (10) überein, durch geeignete Umformung kann ich dies herbeiführen, es ist:

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{12} = a_{13}a_{22}a_{33} - a_{23}^{\,2}a_{13} + a_{23}^{\,2}a_{13} - a_{23}a_{12}a_{33} = -a_{33}A_{13}.$$

Setze ich diesen Wert in die Gleichung ein, so erhalte ich gleichlautend mit (10)

$$x = \frac{-A(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}) - a_{23}(a_{13}A_{23} - a_{23}A_{13})A_{33}' - a_{33}A_{13}A_{33}'^{2}}{2\,A\,A_{33}'^{2}}$$

Wie aus der Proportion hervorgeht, ist der Zähler von y:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & -A_{13} \\ a_{21} & a_{23} & -A_{23} \\ a_{13}+\varrho A_{13} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

Berechne ich diesen Ausdruck in derselben Weise, wie den analogen für x, so wird er lauten:

$$-(a_{13}+\varrho A_{13}) \begin{vmatrix} a_{13} & A_{13} \\ a_{23} & A_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & A_{13} \\ a_{21} & A_{23} \end{vmatrix} =$$

$$(-a_{13}+\varrho A_{13})\, a_{13} A_{23} + (a_{13}+\varrho A_{13})\, a_{23} A_{13} + a_{33} A_{23} A_{33}'$$

$$= -a_{13}^2 A_{23} + a_{13} a_{23} A_{13} - \varrho (a_{13} A_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}^2) + a_{33} A_{23} A_{33}'$$

$$= \frac{A(a_{13} a_{12} + a_{22} a_{23}) - a_{13}(a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) A_{33}' + a_{33} A_{23} A_{33}'^2}{A_{33}'}$$

Demnach wird

$$(11)\; y = \frac{A(a_{13} a_{12} + a_{22} a_{23}) - a_{13}(a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) A_{33}' + a_{33} A_{23} A_{33}'^2}{2 A A_{33}'^2}$$

Durch Multiplikation der Gleichung (7) und (9) mit a_{13} und a_{23} werde ich auch für y nach Methode I denselben Wert erhalten.

$$(7\,a)\quad 2 a_{13} A_{13} A_{33}' y = a_{13} a_{12} A - a_{13}(a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) A_{33}' - a_{13} A_{12} A_{33}'^2$$

$$(9\,a)\quad 2 a_{23} A_{23} A_{33}' y = a_{23} A_{22} A - a_{23} A_{22} A_{33}'^2$$

$$2(a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23}) y = A(a_{13} a_{12} + a_{23} a_{22}) - a_{13}(a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) A_{33}' - (a_{13} A_{12} + a_{23} A_{22}) A_{33}'^2.$$

Wenn ich

$$a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} = A$$

setze, so bleibt nur noch eine Umgestaltung des letzten

Gliedes übrig, um den zu berechnenden Ausdruck mit (11) identisch zu machen:

$$a_{13} A_{12} + a_{23} A_{22} = a_{13}^2 a_{23} - a_{13} a_{12} a_{33} + a_{23} a_{11} a_{33} - a_{31}^2 a_{23}$$
$$= - a_{33} A_{23}.$$

Dies gibt für y denselben Wert, nämlich:

$$y = \frac{A(a_{12} a_{13} + a_{23} a_{22}) - a_{13}(a_{13} A_{23} - a_{23} A_{13}) A_{33} + a_{33} A_{23} A_{33}'^2}{2 A A_{33}'^2}$$

Dass wir auch für ϱ nach dieser Methode den gleichen Wert erhalten, will ich jetzt zum Schluss noch kurz nachweisen:

$$\varrho = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} + \varrho A_{13} & a_{23} + \varrho A_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{2 A A_{33}'}$$

$$= - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \varrho A_{13} & \varrho A_{23} & 0 \end{vmatrix}}{2 A A_{33}'}$$

Die erste Determinante ist gleich A, während die zweite nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt gibt:

$$\varrho (A_{13}^2 + A_{23}^2) = - \varrho A A_{33}'.$$

Wir erhalten also:

$$2 A A_{33}' \varrho = - A + \varrho A A_{33}'$$

$$\varrho = - \frac{1}{A_{33}'}.$$

§ 5.

Neue Methode für die Scheitelpunktsbestimmung des Paraboloids.

Wir vergegenwärtigen uns zunächst die in § 1 gestellte Aufgabe, welche lautet:

2) Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

$$g = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + 2\,a_{13}\,x^2 + 2\,a_{23}\,y^2 + 2\,a_{14}\,x + 2\,a_{24}\,y + 2\,a_{34}\,z + a_{44} = 0$$

stellt ein Paraboloid dar, wenn $A_{44} = 0$, aber A_{14}, A_{24}, A_{34} nicht alle Null sind, oder was nach (9^1) auf dasselbe hinauskommt, wenn $A'_{44} \neq 0$, $A \neq 0$. Unter diesen Bedingungen sind die Koordinaten des Scheitelpunktes zu berechnen. Der Scheitel ist der Punkt, dessen Normale durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Fläche geht.

Die drei Gleichungen der Ebenen, die sich in der nach dem unendlich fernen Mittelpunkt gehenden Normale schneiden, kann ich mit einem zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor durch folgende darstellen:

(2) $$a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14} - \varrho\,A_{14} = 0.$$

(3) $$a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24} - \varrho\,A_{24} = 0.$$

(4) $$a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34} - \varrho\,A_{34} = 0.$$

Nach § 1, II (2) können wir (1) in dieser Form schreiben:

(1 a) $$(g_1 + a_{14})\,x + (g_2 + a_{24})\,y + (g_3 + a_{34})\,z + a_{44} = 0.$$

Da nun die ersten vier Glieder der Gleichungen (2), (3), (4) gleich g_1, g_2, g_3 sind, diese aber gleich ϱA_{14}, ϱA_{24}, A_{34} gesetzt werden können, so wird aus (1a):

(5) $(a_{14} + \varrho A_{24})x + (a_{24} + \varrho A_{24})y + (a_{34} + \varrho A_{34})z + a_{44} = 0.$

I. Berechnung der Werte mit den Nennern A_{14}, A_{24}, A_{34}.

Um A_{14}, A_{24}, A_{34} im Nenner zu haben, fasse ich wie bei der Parabel je drei der gegebenen Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten zusammen. Aus den Gleichungen (4), (2), (3) bestimme ich den Wert von ϱ, dadurch, dass ich (2) mit A_{14}, (3) mit A_{24}, (4) mit A_{34} multipliziere und die entstandenen Gleichungen addiere. Nach § 1, II (5) werden die Coefficienten der Unbekannten x, y, z Null werden und das konstante Glied den Wert A erhalten, so dass:

$$A - \varrho (A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{44}^2) = 0.$$

Beachten wir die Definition von A_{44}' und § 1, II (9), so folgt:

(6) $$A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 = - A_{44}' A.$$

Wir erhalten demnach:

(7) $$\varrho = - \frac{1}{A_{44}'}.$$

a) Aus den Gleichungen (3), (4), (5) folgt, dass der gemeinsame Nenner von x, y, z lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante zerfällt in die folgenden beiden:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} \end{vmatrix}$$

von denen die erste $-A_{14}$ ist, während ich die zweite nach den Elementen der letzten Zeile entwickele. Demnach werden wir erhalten:

$$-A_{14} + \varrho\,(A_{14}\,a_{11} + A_{24}\,a_{12} + A_{34}\,a_{34}).$$

Setzen wir nun für ϱ den in (7) und für A_4 und A_{34} den in § 1, II (6) berechneten Wert, so ist der Nenner:

$$= -A_{14} - \frac{1}{A_{44}'}\left(A_{14}\,a_{11} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\,a_{12}\,A_{14} + \frac{a_{23}}{a_{13}}\,a_{13}\,A_{34}\right)$$

oder:

$$= -A_{14} - \frac{A_{14}}{A_{44}'} \cdot A_{44}'.$$

Dies ergibt als ersten Nenner den Ausdruck:

$$-2\,A_{14}.$$

Die Berechnung der Zähler aus den oben erwähnten Gleichungen ergibt zunächst für x:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} - \varrho\,A_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} - \varrho\,A_{34} \\ a_{24} + \varrho\,A_{24} & a_{34} + \varrho\,A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

wiederum nach den Gliedern der letzten Zeile entwickelt:

$$(a_{24} + \varrho\,A_{24})\,a_{16} - \varrho\,(a_{24} + \varrho\,A_{24})\,(a_{23}\,A_{34}' - a_{33}\,A_{24}) -$$
$$(a_{34} + \varrho\,A_{34})\,a_{15} + \varrho\,(a_{34} + \varrho\,A_{34})\,(a_{22}\,A_{34} - a_{32}\,A_{24}) +$$
$$a_{44}\,a_{11}.$$

Diesen Ausdruck ordne ich nach Potenzen von ϱ und erhalte somit:

$$(\alpha_{11}\,a_{44} + \alpha_{16}\,a_{24} - \alpha_{15}\,a_{34}) + \varrho\,(\alpha_{16}\,A_{24} - \alpha_{15}\,A_{34} - a_{24}\,a_{23}\,A_{34} + a_{24}\,a_{33}\,A_{24} + a_{22}\,a_{34}\,A_{34} - a_{34}\,a_{32}\,A_{24}) - \varrho^2\,(a_{23}\,A_{24}\,A_{34} - a_{33}\,A_{24}^{\,2} - a_{22}\,A_{34}^{\,2} + a_{23}\,A_{24}\,A_{34}).$$

Hierin verschwindet der Coefficient von ϱ, wenn ich beachte, dass

$$a_{24}\,a_{33} - a_{34}\,a_{23} = -\alpha_{16} \quad \text{und} \quad a_{22}\,a_{34} - a_{24}\,a_{23} = -\alpha_{15}$$

ist, für die in ϱ^2 vorkommenden Produkte der A_{hi} setze ich die in § 1, II (9) berechneten Werte, wonach der Zähler lauten wird:

$$(\alpha_{11}\,a_{44} + \alpha_{16}\,a_{24} - \alpha_{15}\,a_{34}) - \varrho^2\,A\,(\alpha_{22}\,a_{33} + \alpha_{33}\,a_{22} - 2\,\alpha_{23}\,a_{23}).$$

Nach Einsetzung des Wertes von ϱ wird:

$$x = \frac{-A\,(\alpha_{22}\,a_{33} + \alpha_{33}\,a_{22} - 2\,\alpha_{23}\,a_{23}) + A_{44}'^{\,2}\,(\alpha_{11}\,a_{44} + \alpha_{16}\,a_{24} - \alpha_{15}\,a_{34})}{-2\,A_{14}\,A_{44}'^{\,2}}$$

oder Zähler und Nenner mit -1 multipliziert:

$$x = \frac{A\,(\alpha_{22}\,a_{33} - 2\,\alpha_{23}\,a_{23} + \alpha_{33}\,a_{23}) - A_{44}'^{\,2}\,(\alpha_{11}\,a_{44} + \alpha_{16}\,a_{24} - \alpha_{15}\,a_{34})}{2\,A_{14}\,A_{44}^{\,12}}. \tag{8}$$

Für y ist der Zähler:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} - \varrho A_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} - \varrho A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Wenn wir in derselben Weise wie bei x vorgehen, erhalten wir:

$$(a_{14} + \varrho A_{14})\,\alpha_{16} - \varrho\,(a_{14} + \varrho A_{14})\,(a_{23} A_{34} - a_{33} A_{24}) - (a_{34} + \varrho A_{34})\,\alpha_{14} + \varrho\,(a_{34} + \varrho A_{34})\,(a_{21} A_{34} - a_{31} A_{24}) - \alpha_{12} a_{44}$$

$$= (-\alpha_{12} a_{44} + \alpha_{16} a_{14} - \alpha_{14} a_{34}) + \varrho\,(\alpha_{16} A_{14} - \alpha_{14} A_{34} - (a_{14} a_{23} - a_{34} a_{21})\,A_{34} + (a_{14} a_{33} - a_{34} a_{31})\,A_{24}) + \varrho^2 (-a_{23} A_{14} A_{34} + a_{33} A_{14} A_{24} + a_{21} A_{34}^2 - a_{31} A_{34} A_{24}).$$

Mit Hinblick darauf, dass:

$$a_{14} a_{23} - a_{34} a_{21} = \alpha_{25}$$
$$a_{14} a_{33} - a_{34} a_{31} = \alpha_{26}$$

und auf § 1 (II) (9) wird

$$y = \frac{A\,(\alpha_{31} a_{23} - \alpha_{12} a_{33} + \alpha_{23} a_{13} - \alpha_{33} a_{21}) - (\alpha_{16} A_{14} - (\alpha_{14} + \alpha_{25}) A_{34} + \alpha_{26} A_{24})\,A_{44}' + (-\alpha_{12} a_{44} - \alpha_{14} a_{34} + \alpha_{16} a_{14})\,A_{44}'^2}{-2\,A_{14} A_{44}'^2}$$

oder

$$(9)\quad y = \frac{A\,(-\alpha_{23} a_{13} - \alpha_{31} a_{23} + \alpha_{21} a_{33} + \alpha_{33} a_{21}) + (\alpha_{16} A_{14} + \alpha_{26} A_{24} - (a_{14} + \alpha_{25})\,A_{34})\,A_{44}' + (\alpha_{12} a_{44} + \alpha_{14} a_{34} - \alpha_{16} a_{14})\,A_{44}'^2}{2\,A_{14} A_{44}'^2}$$

Für z erhalten wir ebenso:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} - \varrho A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} - \varrho A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

$$= (a_{14} + \varrho A_{14})\,\alpha_{15} - \varrho\,(a_{14} + \varrho A_{14})\,(a_{22} A_{34} - a_{32} A_{24}) - (a_{24} + \varrho A_{24})\,\alpha_{14} + \varrho\,(a_{24} + \varrho A_{24})\,(a_{21} A_{34} - a_{31} A_{24}) + a_{44}\,\alpha_{13}.$$

$$= (\alpha_{13} a_{44} + \alpha_{15} a_{14} - \alpha_{14} a_{24}) + \varrho\,(\alpha_{15} A_{14} - \alpha_{14} A_{24} - (a_{14} a_{22} - a_{24} a_{21})\,A_{34} + (a_{14} a_{32} - a_{24} a_{31})\,A_{24}) + \varrho^2 (-a_{22} A_{14} A_{34} + a_{32} A_{14} A_{24} + a_{21} A_{24} A_{34} - a_{31} A_{24}^2).$$

Da nun:

$$a_{14}\,a_{22} - a_{24}\,a_{21} = -\,\alpha_{35}$$
$$a_{14}\,a_{32} - a_{24}\,a_{31} = -\,\alpha_{36},$$

so wird nach § 1, II (9):

$$z = \frac{\begin{array}{c} A\,(\alpha_{31}\,a_{22} - a_{32}\,\alpha_{12} - a_{21}\,\alpha_{32} + \alpha_{22}\,a_{31}) - (\alpha_{15}\,A_1 \\ -(\alpha_{15}+\alpha_{36})\,A_{24} + \alpha_{35}\,A_{34})\,A_{44}' + (\alpha_{13}\,a_{44} \\ +\alpha_{15}\,a_{14} - \alpha_{14}\,a_{24})\,A_{44}'^2 \end{array}}{-\,2\,A_{14}\,A_{44}'^2}.$$

$$(10)\quad z = \frac{\begin{array}{c} -A\,(-\alpha_{23}\,a_{21} + \alpha_{31}\,a_{22} - \alpha_{12}\,a_{32} + \alpha_{22}\,a_{31}) \\ +(\alpha_{15}\,A_{14} - (\alpha_{15}+\alpha_{36})\,A_{24} + \alpha_{35}\,A_{34})\,A_{44}' - (\alpha_{13}\,\alpha_{44} \\ -\alpha_{14}\,a_{24} + \alpha_{15}\,a_{14})\,A_{44}'^2 \end{array}}{2\,A_{14}\,A_{44}'^2}$$

b) Um den Nenner A_{24} zu erhalten, werde ich die Gleichungen (2), (4), (5) zur Berechnung der Unbekannten verwenden müssen, denn jetzt wird der Nenner dargestellt durch folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{14}+\varrho\,A_{14} & a_{24}+\varrho\,A_{24} & a_{34}+\varrho\,A_{34} \end{vmatrix}$$

welche ich in diese beiden zerlegen kann:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} \end{vmatrix}$$

Die erste von ihnen ist A_{24}, die zweite muss ich erst berechnen, wodurch ich erhalte:

$$A_{24} + \varrho\,(-A_{14}\,\alpha_{21} - A_{24}\,\alpha_{22} - A_{34}\,\alpha_{23})$$

werden hierin A_{14} und A_{34}, wie es in § 1, II (7) berechnet ist, durch A_{24} ausgedrückt, so ist:

$$A_{24} - \frac{1}{A_{24}'}\left(-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{21}A_{24} - a_{22}A_{24} - \frac{a_{33}}{a_{23}}a_{23}A_{34}\right)$$

$= 2A_{24}$ als Nenner zu betrachten.

Der Zähler von x nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} - \varrho A_{34} \\ a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante berechne ich wie die früheren nach den Elementen der letzten Zeile, somit erhalte ich

$$\begin{aligned} &-(a_{24} + \varrho A_{24})a_{26} - \varrho(a_{24} + \varrho A_{24})(a_{13}A_{34} - a_{33}A_{14}) \\ &+(a_{34} + \varrho A_{34})a_{25} + \varrho(a_{34} + \varrho A_{34})(a_{12}A_{34} - a_{32}A_{14}) \end{aligned}$$

oder nach Potenzen von ϱ geordnet:

$$\begin{aligned} &(-a_{21}a_{44} - a_{26}a_{24} + a_{25}a_{34}) + \varrho(-a_{26}A_{24} + a_{25}A_{34} \\ &-(a_{24}a_{23} - a_{34}a_{12})A_{34} + (a_{24}a_{33} - a_{34}a_{32})A_{14}) + \varrho^2 \\ &(-a_{13}A_{24}A_{34} + a_{33}A_{14}A_{24} + a_{12}A_{34}^2 - a_{32}A_{34}A_{14}). \end{aligned}$$

Infolge von:

$$\begin{aligned} a_{24}a_{13} - a_{34}a_{12} &= -a_{14} \\ a_{24}a_{33} - a_{34}a_{32} &= -a_{16} \end{aligned}$$

und von § 1, II (9) ist:

$$(11)\quad x = \frac{\begin{aligned}&(-a_{21}a_{44} + a_{25}a_{34} - a_{26}a_{24})A_{44}'^2 \\ &-(-a_{16}A_{14} - a_{26}A_{24} + (a_{25} + a_{14})A_{34})A_{44}' \\ &+A(+a_{23}a_{13} + a_{31}a_{32} - a_{12}a_{33} - a_{33}a_{12})\end{aligned}}{2A_{24}A_{44}'^2}.$$

Für y erhält der Zähler den Wert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{31} & & a_{33} & a_{34} - \varrho A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} & \end{vmatrix}$$

Da ich diesen Ausdruck analog der Berechnung von x ausführe, ist es wohl nicht nötig, die Methode zu wiederholen, ich erhalte also:

$$\begin{aligned} &- (a_{14} + \varrho A_{14})\, \alpha_{26} - \varrho\, (a_{14} + \varrho A_{14})\, (a_{13} A_{34} - a_{33} A_{14}) \\ &+ (a_{34} - \varrho A_{34})\, \alpha_{24} + \varrho\, (a_{34} + \varrho A_{34})\, (a_{11} A_{34} - a_{31} A_{14}) \\ &+ a_{44}\, \alpha_{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = &(\alpha_{22}\, a_{44} + \alpha_{24}\, a_{34} - \alpha_{26}\, a_{14}) + \varrho\, (- \alpha_{26} A_{14} + \alpha_{24} A_{34} \\ &- (a_{14}\, a_{13} - a_{34}\, a_{11})\, A_{34} + (a_{14}\, a_{33} - a_{34}\, a_{31})\, A_{14}) \\ &+ \varrho^2\, (- a_{13} A_{14} A_{34} + a_{33} A_{14}{}^2 + a_{14} A_{34}{}^2 - a_{31} A_{14} A_{34}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{14}\, a_{13} - a_{34}\, a_{11} &= \alpha_{24} \\ a_{14}\, a_{33} - a_{34}\, a_{31} &= \alpha_{26} \end{aligned}$$

$$(12) \qquad y = \frac{(\alpha_{22}\, a_{44} + \alpha_{24}\, a_{34} - \alpha_{26}\, a_{14})\, A_{44}'^2 + A\, (- a_{11}\, a_{33} - 2\, a_{13}\, a_{13} - a_{33}\, a_{11})}{2\, A_{24}\, A_{44}'^2}.$$

Der Zähler von z lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} - \varrho A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Ebenso wie x und y berechnet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} &- (a_{14} + \varrho A_{14})\, \alpha_{25} - \varrho\, (a_{14} + \varrho A_{14})\, (a_{12} A_{34} - a_{32} A_{14}) \\ &+ (a_{24} + \varrho A_{24})\, \alpha_{24} + \varrho\, (a_{24} + \varrho A_{24})\, (a_{11} A_{34} - a_{31} A_{14}) \\ &- a_{44}\, \alpha_{23} \end{aligned}$$

$$= (-\alpha_{23}\,a_{44} + \alpha_{24}\,a_{24} - \alpha_{25}\,a_{14}) + \varrho\,(-\alpha_{25}\,A_{14} + \alpha_{24}\,A_{24}$$
$$(-a_{14}\,a_{12} - a_{24}\,a_{11})\,A_{34} + (a_{14}\,a_{32} - a_{24}\,a_{31})\,A_{14})$$
$$+ \varrho^2\,(-a_{12}\,A_{14}\,A_{34} + a_{32}\,A_{14}^2 + a_{11}\,A_{24}\,A_{34} - a_{31}\,A_{14}\,A_{24}).$$

$$a_{14}\,a_{12} - a_{24}\,a_{11} = -\alpha_{34}$$
$$a_{14}\,a_{32} - a_{24}\,a_{31} = -\alpha_{36}.$$

$$(13)\quad z = \frac{(-\alpha_{23}\,a_{44} + \alpha_{24}\,a_{24} - \alpha_{25}\,a_{14})\,A_{44}'^2 - (-(\alpha_{25} + \alpha_{36})\,A_{14} + \alpha_{24}\,A_{24} + \alpha_{34}\,A_{34})\,A_{44}' + A\,(-\alpha_{23}\,a_{11} + \alpha_{31}\,a_{12} + \alpha_{12}\,a_{31} - \alpha_{11}\,a_{32})}{2\,A_{24}\,A_{44}'^2}.$$

c) Aus den Gleichungen (2), (3) und (5) erhalte ich als dritten Wert des Nenners natürlich $2\,A_{34}$ durch Berechnung der folgenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} + \varrho\,A_{14} & a_{42} + \varrho\,A_{42} & a_{34} + \varrho\,A_{34} \end{vmatrix}$$

die durch Zerlegen gleich wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{34} \end{vmatrix} + \varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} \end{vmatrix}$$

Der erste Teil dieses Ausdrucks ist $-A_{34}$, für den zweiten erhalte ich durch Entwicklung nach den Gliedern der letzten Zeile:

$$\varrho\,(A_{14}\,\alpha_{31} + A_{24}\,\alpha_{32} + A_{34}\,\alpha_{33}).$$

Nach § 1, II (8) drücke ich A_{14} und A_{24} durch A_{34}, wonach ich den Ausdruck in folgender Gestalt schreiben kann:

$$\varrho\left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{31}}\,\alpha_{31}\,A_{34} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{32}}\,\alpha_{32}\,A_{34} + \alpha_{33}\,A_{34}\right)$$

welcher aber $= -A_{34}$ ist.

Danach erhält der ganze Nenner, wie schon oben gesagt, den Wert $-2A_{34}$.

Den Zähler von x bildet dann diese Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} - \varrho A_{24} \\ a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Entwickele ich sie genau wie in den bisherigen Betrachtungen a) und b), so ist sie gleich:

$$\begin{aligned} &(a_{24} + \varrho A_{24})\alpha_{36} - \varrho(a_{24} + \varrho A_{24})(a_{13}A_{24} - a_{23}A_{14}) \\ &- (a_{34} + \varrho A_{34})\alpha_{35} + \varrho(a_{34} + \varrho A_{34})(a_{12}A_{24} - a_{22}A_{14}) + a_{14}\alpha_{31} \\ &= (a_{44}\alpha_{31} - a_{34}\alpha_{35} + a_{24}\alpha_{36}) + \varrho(\alpha_{36}A_{24} - \alpha_{35}A_{34} \\ &\quad - A_{24}(a_{24}a_{13} - a_{34}a_{12}) + A_{14}(a_{24}a_{23} - a_{34}a_{22})) \\ &\quad + \varrho^2(-a_{13}A_{24}^2 + a_{23}A_{14}A_{24} + a_{12}A_{34}A_{24} - a_{22}A_{24}A_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{24}a_{13} - a_{34}a_{12} &= -\alpha_{14} \\ a_{24}a_{23} - a_{34}a_{22} &= -\alpha_{15}. \end{aligned}$$

Wird der Koefficient von ϱ^2 nach § 1, II (9) umgeformt, so wird:

$$x = \frac{\begin{aligned}&(\alpha_{31}a_{44} - \alpha_{35}a_{34} + \alpha_{36}a_{24})A_{44}'^2 - (-\alpha_{15}A_{14} + (\alpha_{15} + \alpha_{36})A_{24} \\ &- \alpha_{35}A_{34})A_{44}' + A(-\alpha_{23}a_{12} - \alpha_{31}a_{22} + \alpha_{12}a_{23} + \alpha_{22}a_{13})\end{aligned}}{-2A_{34}A_{44}'^2}$$

$$(14)\quad x = \frac{\begin{aligned}&-(\alpha_{31}a_{44} - \alpha_{35}a_{34} + \alpha_{36}a_{24})A_{44}'^2 + (-\alpha_{15}A_{14} \\ &+ (\alpha_{15} + \alpha_{36})A_{24} - \alpha_{35}A_{34})A_{44}' - A(-\alpha_{23}a_{12} \\ &+ \alpha_{31}a_{22} + \alpha_{12}a_{23} + \alpha_{22}a_{13})\end{aligned}}{2A_{34}A_{44}'^2}$$

y erhält als Zähler:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} - \varrho A_{24} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{14} + \varrho A_{14})\, a_{36} - \varrho\,(a_{14} + \varrho A_{14})\,(a_{13} A_{24} - a_{23} A_{14})$$

$$- (a_{34} + \varrho A_{34}) a_{34} + \varrho (a_{34} + \varrho A_{34})(a_{11} A_{24} - a_{21} A_{14}) - a_{44} a_{32}$$

$$= (- a_{23} a_{44} + a_{36} a_{14} - a_{34} a_{34}) + \varrho\,(a_{36} A_{14} - a_{34} A_{34}$$
$$- (a_{14} a_{13} - a_{34} a_{11}) A_{24} + (a_{14} a_{23} - a_{34} a_{21}) A_{14})$$
$$+ \varrho^2 (- a_{13} A_{14} A_{24} + a_{23} A_{14}^2 + a_{11} A_{24} A_{34} - a_{21} A_{14} A_{34})$$

$$a_{14} a_{13} - a_{34} a_{11} = \alpha_{24}$$
$$a_{14} a_{23} - a_{34} a_{21} = \alpha_{25}.$$

$$y = \frac{\begin{array}{c}(- \alpha_{32} a_{44} - \alpha_{34} a_{34} + \alpha_{36} a_{14}) A_{44}'^2 - \big((\alpha_{36} + \alpha_{25}) A_{14} \\ - \alpha_{24} A_{24} - \alpha_{34} A_{34}\big) A_{44}' + A\,(- \alpha_{23} a_{11} + \alpha_{31} a_{21} \\ + \alpha_{12} a_{13} - \alpha_{11} a_{23})\end{array}}{- 2 A_{34} A_{44}'^2},$$

$$(15) \quad y = \frac{\begin{array}{c}(\alpha_{32} a_{44} + \alpha_{34} a_{34} - \alpha_{36} a_{14}) A_{44}'^2 + \big((\alpha_{36} + \alpha_{25}) A_{14} \\ - \alpha_{24} A_{24} - \alpha_{34} A_{34}\big) A_{44}' + A\,(\alpha_{23} a_{11} - \alpha_{31} a_{21} \\ - \alpha_{12} a_{13} + \alpha_{11} a_{23})\end{array}}{2 A_{34} A_{44}'^2}.$$

Der Zähler von z lässt sich durch diese Determinante darstellen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} - \varrho A_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} - \varrho A_{24} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{14} + \varrho A_{14})\, \alpha_{35} - \varrho\,(a_{14} + \varrho A_{14})\,(a_{12} A_{24} - a_{22} A_{14})$$

$$- (a_{24} + \varrho\, A_{24})\, \alpha_{34} + \varrho\,(a_{24} + \varrho\, A_{24})\,(a_{11} A_{24} - a_{12} A_{14}) + a_{44} \alpha_{33}$$

$$= (\alpha_{33}\, a_{44} + \alpha_{35}\, a_{14} - a_{24}\, \alpha_{34}) + \varrho\,(\alpha_{35} A_{14} - \alpha_{34} A_{24}$$
$$- A_{24}\,(a_{14}\, a_{12} - a_{24}\, a_{11}) + A_{14}\,(a_{14}\, a_{22} - a_{24}\, a_{12})$$
$$+ \varrho^2\,(- a_{12} A_{14} A_{24} + a_{22} A_{14}^{\,2} + a_{11} A_{24}^{\,2} - a_{12} A_{14} A_{24})$$

$$a_{14}\, a_{12} - a_{24}\, a_{11} = - \alpha_{34}$$
$$a_{14}\, a_{22} - a_{24}\, a_{12} = - \alpha_{35}.$$

Es heben sich also, wie es nicht anders zu erwarten war, die Glieder des Koeffizienten von ϱ weg, so dass wir als Gesamtwert von z erhalten:

$$z = \frac{(\alpha_{33}\, a_{44} - \alpha_{34}\, a_{24} + \alpha_{35}\, a_{14}) A_{44}'^{\,2} + (- \alpha_{11}\, a_{22} - 2\, \alpha_{12}\, a_{12} - \alpha_{22}\, a_{11}) A}{- 2 A_{34} A_{44}'^{\,2}}.$$

$$(16) \quad z = \frac{- (\alpha_{33}\, a_{44} - \alpha_{34}\, a_{24} + \alpha_{34}\, a_{14}) A_{44}'^{\,2} + (\alpha_{11}\, a_{22} + 2\, \alpha_{12}\, a_{12} + \alpha_{22}\, a_{11}) A}{2 A_{34} A_{44}'^{\,2}}.$$

Da auch hier A_{14}, A_{24}, A_{34} nicht alle Null sein dürfen und $A_{44}' = 0$ ist, so ist eine der drei Darstellungen stets brauchbar.

II. Berechnung der Werte mit dem Nenner $A \cdot A_{44}'$.

Wie in § 4, II bei der Parabel, gewinnen wir auch hier durch Zusammenfassung aller vier Gleichungen eine Proportion von x, y, z, $1, \varrho$ zu gewissen Determinanten, durch deren Berechnung wir dann den einfachsten und übersichtlichsten Wert für den Nenner erhalten, da in ihm nur die Glieder enthalten sind, die der Voraussetzung nach nicht Null sein dürfen.

Wir leiten folgende Proportion her:

$$x : y : z : 1 : \varrho =$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} - A_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{34} - A_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} - A_{34} \\ a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \quad 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} - A_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} - A_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} - A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \quad 0 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} - A_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} - A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} - A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{44} \quad 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} - A_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} - A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} \; 0 \end{vmatrix}$$

$$: - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{31} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Der gemeinsame Nenner aller Unbekannten ist aber durch das vierte Glied der rechten Seite unserer Proportion gegeben; er lautet demnach:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - A_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & - A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & - A_{34} \\ a_{14} + \varrho A_{14} & a_{24} + \varrho A_{24} & a_{34} + \varrho A_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

Wie früher wird auch diese Determinante nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt und ergibt dann:

$$(a_{14} + \varrho A_{14}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & A_{14} \\ a_{22} & a_{23} & A_{24} \\ a_{32} & a_{33} & A_{34} \end{vmatrix} - (a_{24} + \varrho A_{24}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{14} \\ a_{21} & a_{23} & A_{24} \\ a_{31} & a_{33} & A_{34} \end{vmatrix}$$

$$+ (a_{34} + \varrho A_{34}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{14} \\ a_{21} & a_{22} & A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & A_{34} \end{vmatrix}$$

Diese Determinanten gleichen aber den in Methode I schon berechneten, es sind nur die dritte Zeile und Kolonne mit einander vertauscht, was ihren Wert aber nicht beeinflusst. Sie hatten der Reihe nach die Werte $+A_{14}\,A_{44}'$, $-A_{24}\,A_{44}'$, $+A_{34}\,A_{44}'$, so dass wir erhalten:

$$A_{44}'\left\{(a_{14}+\varrho A_{14})A_{14}+(a_{24}+\varrho A_{24})A_{24}+(a_{34}+\varrho A_{34})A_{31}\right\}$$

$$=A_{44}'\left\{a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}+\varrho\,(A_{14}{}^2+A_{24}{}^2+\varrho\,A_{31}{}^2)\right\}$$

Aus § 1, II (5) und § 5, I (6) folgt der Klammerwert $2A$, der ganze Nenner ist demnach $2A\,A_{44}'$, woraus hervorgeht, dass er niemals Null sein kann, x, y und z erhalten also stets endliche Werte, d. h.:

Ein Paraboloid hat immer einen bestimmten endlichen Scheitelpunkt.

Gehen wir nunmehr zur Berechnung der einzelnen Zähler oder vielmehr der Unbekannten selbst, so erhalte ich zunächst für x diese Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & -A_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & -A_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & -A_{34} \\ a_{24}+\varrho A_{24} & a_{34}+\varrho A_{34} & a_{44} & 0 \end{vmatrix}$$

als Zähler, die ich nach den Gliedern der letzten Zeile ausrechnen werde, wodurch wir folgende Summe gewinnen:

$$(a_{24}+\varrho A_{24})\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & A_{14} \\ a_{23} & a_{24} & A_{24} \\ a_{33} & a_{34} & A_{34} \end{vmatrix} -(a_{34}+\varrho A_{34}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & A_{14} \\ a_{22} & a_{24} & A_{24} \\ a_{32} & a_{34} & A_{34} \end{vmatrix}$$

$$+a_{44}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & A_{14} \\ a_{22} & a_{23} & A_{24} \\ a_{32} & a_{33} & A_{34} \end{vmatrix}$$

Die letzte dieser Determinanten dritten Grades ist, wie aus § 5, I a ersichtlich, gleich $A_{44}\,A_{44}'$, die anderen beiden sind nach den Elementen der letzten Kolonne zu berechnen, so dass wir erhalten:

$$(a_{24} + \varrho\, A_{24})\left\{A_{14}\,a_{16} + A_{24}\,a_{26} + A_{34}\,a_{36}\right\}$$
$$-(a_{34} + \varrho\, A_{34})\left\{A_{14}\,a_{15} + A_{24}\,a_{25} + A_{34}\,a_{35}\right\} + a_{44}A_{14}\,A_{44}'$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern lassen sich bequem in einer Summenformel vereinigen, ordnen wir ferner nach Potenzen von ϱ, so wird der Zähler

$$\left[a_{44}\,A_{14}\,A_{44}'^{2} + \left(a_{24}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_6} - a_{34}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_5}\right)A_{44}'\right.$$
$$\left. - A_{24}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_6} + A_{34}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_5}\right] : A_{44}'.$$

Ich hätte auch hier, wenn ich die Produkte von je zwei A_{ki} gebildet hätte, ein Glied mit dem Faktor A erhalten, doch halte ich diese Form für einfacher und übersichtlicher. Es ist nämlich:

$$a_{44}\,A_{14}\,A_{44}'^{2} + \left(a_{24}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_6} - a_{34}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_5}\right)A'_{44}$$
$$- A_{24}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_6} + A_{34}\sum_{1}^{3}k\,A_{k_4}\,a_{k_5}$$
$$(17)\quad x = \frac{}{2\,A\,A_{44}'^{2}}.$$

Der Zähler von y ist diese Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & -A_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & -A_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & -A_{34} \\ a_{14}+\varrho A_{14} & a_{34}+\varrho A_{34} & a_{44} & 0. \end{vmatrix}$$

$$= (a_{14}+\varrho A_{14})\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} & A_{14} \\ a_{23} & a_{24} & A_{24} \\ a_{33} & a_{34} & A_{34} \end{vmatrix} - (a_{34}+\varrho A_{34})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & A_{14} \\ a_{21} & a_{24} & A_{24} \\ a_{31} & a_{34} & A_{34} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{14} \\ a_{21} & a_{23} & A_{24} \\ a_{31} & a_{33} & A_{34} \end{vmatrix}$$

In § 5, I b) haben wir für die letzte Determinante $-A_{24}A_{44}'$ berechnet. Für die beiden anderen gewinnen wir folgende Ausdrücke:

$$(a_{14}+\varrho A_{14})\left\{A_{14}a_{16}+A_{24}a_{26}+A_{34}a_{36}\right\}=a_{14}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_6}+\varrho A_{14}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_6}$$

$$(a_{34}+\varrho A_{34})\left\{A_{14}a_{14}+A_{24}a_{24}+A_{34}a_{34}\right\}=a_{34}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_4}+\varrho A_{34}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_4}.$$

Demnach ist:

$$(18)\quad y=\frac{-a_{44}A_{24}A_{44}'^2+\left(a_{14}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_6}-a_{34}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_4}\right)A_{44}'-A_{14}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_6}+A_{34}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_4}}{2AA_{44}'^2}.$$

Für z berechnet sich der Zähler aus diesem Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{14} & -A_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{24} & -A_{24}\\ a_{31} & a_{23} & a_{34} & -A_{34}\\ a_{14}+\varrho A_{14} & a_{24}-\varrho A_{24} & a_{44} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_{14}+\varrho A_{14})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{14} & A_{14}\\ a_{22} & a_{24} & A_{24}\\ a_{23} & a_{34} & A_{34}\end{vmatrix}-(a_{24}+\varrho A_{24})\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & A_{14}\\ a_{21} & a_{24} & A_{24}\\ a_{31} & a_{34} & A_{34}\end{vmatrix}+a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & A_{14}\\ a_{21} & a_{22} & A_{24}\\ a_{31} & a_{23} & A_{34}\end{vmatrix}$$

Auch hier ist die letzte Determinante schon in § 5, I c) gleich $A_{34}A'_{44}$ berechnet, die Werte für die beiden ersten sind:

$$(a_{14}+\varrho A_{14})\left\{A_{14}a_{15}+A_{24}a_{25}+A_{34}a_{35}\right\}=a_{14}\sum_1^3{}^k A_{k4}a_{k_5}+\varrho A_{14}\sum_1^3{}^k A_{k_4}a_{k_5}.$$

$$\text{und: } (a_{24} + \varrho A_{14}) \left\{ A_{14} a_{14} + A_{24} a_{24} + A_{43} a_{35} \right\}$$
$$= a_{14} \sum_1^3{}^k A_{k_4} a_{k_4} + \varrho A_{24} \sum_1^3 A_{k_4} a_{k_4} .$$

Es folgt hieraus:

$$(19) \quad z = \frac{a_{44} A_{34} A_{44}'^2 + \left(a_{14} \sum_1^3{}^k A_{k_4} a_{k_5} - a_{24} \sum_1^3{}^k A_{k_4} a_{k_4} \right) A'_{44} - A_{14} \sum_1^3{}^k A_{k_4} a_{k_5} + A_{24} \sum_1^3{}^k A_{k_4} a_{k_4}}{2 A A_{44}'^2}.$$

Ich hätte auch hier ebenso wie in § 4 nachweisen können, dass die nach der Methode I berechneten Werte durch geeignete Multiplikation und Addition sich auf die Form der Ausdrücke (17), (18), (19) bringen lassen. Es leuchtet dies aber ohne weiteres ein, und ich habe daher die Ausführung dieser Rechnung unterlassen. Ebenso würde ich aus der dem Proportionalitätsfaktor ϱ entsprechenden Determinante den schon in I dargestellten Wert erhalten, es kann daher auch diese Berechnung unterbleiben.

Durch die Berechnung der Unbekannten nach unserer neuen Methode haben wir also den in der Einleitung gestellten Anforderungen vollständig Genüge geleistet. Die Ausdrücke sind stets bestimmt und endlich für $A \neq 0$, $A_{44}' \neq 0$, $A_{44} = 0$ oder, was dasselbe ist für $A_{44} = 0$ und $A \cdot A_{44}' \neq 0$.

§ 6.

Bestimmung der Gleichung der Scheitellinie des parabolischen Cylinders.

I. Behandlung der Aufgabe durch Plücker.

Auch diese Aufgabe ist bereits von Plücker in dem erwähnten Werke gelöst worden. Doch sind auch hier nur die beiden letzten Gleichungen gegeben und die Berechnung selbst ist nicht ausgeführt, so dass man ohne weiteres nicht entscheiden kann, wann die Linienkoordinaten Null sind und und wann nicht.

Wenn wir Plückers Betrachtungen, in unsere jetzigen Bezeichnungen übertragen, kurz wiedergeben, so lauten sie:

Im Falle des parabolischen Cylinders sind die durch die drei Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} g_1 = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14} = 0 \\ g_2 = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24} = 0 \\ g_3 = a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

gegebenen Diametralebenen parallel, also die drei Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} h_1 = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = 0 \\ h_2 = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = 0 \\ h_3 = a_{32}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = 0 \end{cases}$$

identisch und es ergibt sich, indem wir mit δ', δ'', δ''', drei noch zu bestimmende Konstante bezeichnen:

$$(3)\qquad \delta' h_1 = \delta'' h_2 = \delta''' h_3.$$

Multiplizieren wir $h_1\, h_2\, h_3$ bezw. mit a_{23}, a_{31}, a_{12} und beachten, dass: $a_{23} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{21} = 0$ sind, woraus folgt, dass

$$a_{11}\, a_{23} = a_{21}\, a_{13}$$
$$a_{22}\, a_{31} = a_{32}\, a_{21}$$
$$a_{33}\, a_{21} = a_{31}\, a_{23}$$

ist, so werden die drei Gleichungen $h_1\, h_2\, h_3$ unter einander und mit folgendem Ausdruck identisch:

$$(4) \qquad a_{23}\, a_{31}\, a_{12} \left(\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}}\right)$$

Es ist also:

$$\delta' = a_{23};\ \delta'' = a_{31};\ \delta''' = a_{12},$$

wonach wir aus (3) erhalten:

$$(5) \qquad a_{23}\, h_1 = a_{31}\, h_2 = a_{12}\, h_3.$$

Wenn wir in diese Gleichung $g_1\, g_2\, g_3$ einführen, nimmt sie folgende Form an:

$$a_{23}\,(g_1 - a_{14}) = a_{31}\,(g_2 - a_{24}) = a_{12}\,(g_3 - a_{34}).$$

Die Richtung der Seiten des parabolischen Cylinders können wir als die Richtung der Durchschnittslinie einer Diametralebene desselben mit der Polarebene irgend eines Punktes konstruieren. Zur Bestimmung dieser Richtung erhalten wir hiernach die folgenden beiden Gleichungen:

$$(6) \qquad \frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0,$$

$$(7) \qquad a_{14}\, x + a_{24}\, y + a_{34}\, 2 = 0.$$

Schreiben wir die allgemeine Gleichung g in dieser Form:

$$g = (h_1\, x + h_2\, y + h_3\, z) + 2\, a_{14}\, x + 2\, a_{24}\, y + 2\, a_{34}\, z + a_{44} = 0,$$

so geht sie infolge der Gleichung (4) in die folgende über:

$$(8)\quad a_{23}\,a_{31}\,a_{12}\left(\frac{x}{a_{23}}+\frac{y}{a_{31}}+\frac{z}{a_{12}}\right)^2+2\,a_{14}\,x+2\,a_{24}\,y+2\,a_{34}\,z+a_{44}=0$$

Damit eine grade Linie eine Axe des parabolischen Cylinders sei, reicht es hin, dass sie zugleich eine Normale der Fläche und den Diametralebenen parallel ist. Eine solche Ebene ist aber durch Gleichung (1) dargestellt. Ferner ist zu beachten, dass eine durch den Anfangspunkt, parallel mit der Normale in irgend einem Punkt der Fläche, gehende gerade Linie folgende beide Gleichungen hat, wenn wir auf diesen Punkt die partiellen Differentialquotienten beziehen:

$$\frac{\delta g}{\delta z}\,x=\frac{\delta y}{\delta x}\cdot z;\quad \frac{\delta g}{\delta z}\,y=\frac{\delta g}{\delta y}\cdot z$$

$$(9)\qquad \text{oder } g_3\,x=g_1\,z \text{ und } g_3\,y=g_2\,z.$$

Soll also diese Normale eine Axe der Fläche sein, so müssen die Gleichungen (7) und (9) gemeinsam bestehen, dies verlangt:

$$\frac{g_1}{a_{23}}+\frac{g_2}{a_{13}}+\frac{g_3}{a_{12}}=\frac{h_1}{a_{23}}+\frac{h_2}{a_{31}}+\frac{h_3}{a_{12}}+\left(\frac{a_{14}}{a_{23}}+\frac{a_{24}}{a_{13}}+\frac{a_{34}}{a_{12}}\right)=0$$

oder wenn wir mit $a_{23}\,a_{31}\,a_{12}$ multiplizieren:

$$a_{23}\,a_{31}\,a_{12}\,\frac{h_1}{a_{23}}+a_{23}\,a_{31}\,a_{12}\frac{h_2}{a_{31}}+a_{23}\,a_{31}\,a_{12}\frac{h_3}{a_{12}}$$
$$+a_{23}\,a_{31}\,a_{12}\left(\frac{a_{14}}{a_{13}}+\frac{a_{24}}{a_{31}}+\frac{a_{34}}{a_{12}}\right)=0.$$

Wenn wir hierauf die Gleichung (4) anwenden:

$$(10)\qquad (a_{31}{}^2a_{12}{}^2+a_{23}{}^2a_{12}{}^2+a_{23}{}^2a_{13})\left(\frac{x}{a_{23}}+\frac{y}{a_{31}}+\frac{z}{a_{21}}\right)$$
$$(+a_{14}\,a_{13}\,a_{12}+a_{24}\,a_{23}\,a_{12}+a_{34}\,a_{23}\,a_{13})=0$$

und zur Abkürzung setzen:

$$s = \frac{a_{14}\, a_{13}\, a_{12} + a_{24}\, a_{23}\, a_{12} + a_{34}\, a_{23}\, a_{31}}{a_{31}^{\,2}\, a_{12}^{\,2} + a_{23}^{\,2}\, a_{12}^{\,2} + a_{23}^{\,2}\, a_{13}^{\,2}}$$

so erhalten wir:

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{21}} + s = 0. \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, in welcher die Scheitel der unendlich vielen Axen liegen. Um die Scheitellinie zu bestimmen, brauchen wir diese Gleichung nur mit der Gleichung der Fläche zusammenzustellen. Dadurch reduziert sich aber diese Gleichung auf den ersten Grad, indem sie in die folgende übergeht:

$$a_{14}\, x + a_{24}\, y + a_{34}\, z + \frac{1}{2}\left(a_{44} + a_{23}\, a_{31}\, a_{12}\, s^2\right\} = 0. \tag{12}$$

Soweit geht die Plückersche Betrachtung. Entwickele ich nun aus den Gleichungen die Linienkoordinaten, so erhalte ich zwar für q_{23}, q_{31}, q_{12} ziemlich einfache Ausdrücke, die aber doch den gestellten Bedingungen nicht genügen. Für q_{14}, q_{24}, q_{34} sind die Werte allerdings sehr kompliziert, da in ihnen die eingeführte Abkürzung s vorkommt.

In Clebsch-Lindemann findet sich keine Behandlung dieser Aufgabe, ich gehe daher gleich zur neuen Methode über.

II. Neue Methode für die Berechnung der Scheitellinie des parabolischen Cylinders.

Ich wiederhole zunächst die in § 1 (3) gestellte Aufgabe:

3) Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Ordnung stellt einen parabolischen Cylinder dar, wenn $A = 0$, $A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, alle Unterdeterminanten von A_{44}

gleich Null, $A_{44}'' \neq 0$ und alle Unterdeterminanten von A ebenfalls nicht Null. Unter diesen Bedingungen ist die Gleichung der Scheitellinie aufzustellen. Die Scheitellinie definieren wir als die Grade, deren Normalebene durch die unendlich ferne Mittelpunktsaxe der Fläche geht.

Die drei durch folgende Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} g_1 = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14} = 0 \\ g_2 = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24} = 0 \\ g_3 = a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

gegebenen Ebenen stellen, wie schon Plücker bewiesen hat, in diesem Falle drei sich in der unendlich fernen Mittelpunktsaxe schneidende, d. h. parallele Ebenen dar.

Es seien nun $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$ die Kosinus der zu den parallelen Ebenen (1) senkrechten Richtung also:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_3 = \dfrac{a_{11}}{\varrho_1} = \dfrac{a_{21}}{\varrho_2} = \dfrac{a_{31}}{\varrho_3} \\ \beta_3 = \dfrac{a_{12}}{\varrho_1} = \dfrac{a_{22}}{\varrho_2} = \dfrac{a_{32}}{\varrho_3} \\ \gamma_3 = \dfrac{a_{13}}{\varrho_1} = \dfrac{a_{23}}{\varrho_2} = \dfrac{a_{33}}{\varrho_3} \end{cases}$$

Da $\alpha_3 + \beta_3{}^2 + \gamma_3{}^2 = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} \varrho_1{}^2 &= a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 \\ \varrho_2{}^2 &= a_{21}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{23}{}^2 \\ \varrho_3{}^2 &= a_{31}{}^2 + a_{32}{}^2 + a_{33}{}^2. \end{aligned}$$

Weil nun $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = 0$, so ist

$$a_{11}\,a_{22} = a_{11}{}^2,\ a_{11}\,a_{33} = a_{13}{}^2,\ a_{22}\,a_{33} = a_{23}{}^2$$

und $A_{44}'' = a_{11} + a_{22} + a_{33}$,

so erhalten wir:

$$(3) \qquad \varrho_1^{\,2} = a_{11} A_{44}'', \quad \varrho_2^{\,2} = a_{22} A_{44}'', \quad \varrho_3^{\,2} = a_{33} A_{44}''.$$

Ausserdem genügen sie dann auch diesen Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} (a_{11} - A_{44}'')\alpha_3 + a_{12}\beta_3 + a_{13}\gamma_3 = 0 \\ a_{21}\alpha_3 + (a_{22} - A_{44}'')\beta_3 + a_{23}\gamma_3 = 0 \\ a_{31}\alpha_3 + a_{32}\beta_3 + (a_{33} - A_{44}'')\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Sind $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ die Kosinus irgend 2 zu einander und zur Richtung (2) senkrechte Richtungen, so erfüllen sie die Gleichungen:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23}\gamma_1 = 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\gamma_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\gamma_2 = 0 \\ a_{31}\alpha_2 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

wo je drei Gleichungen einer einzigen aequivalent sind.

Wir suchen nun einen Punkt $x_0\,y_0\,z_0$ der Fläche, dessen Normale der Ebene (1) parallel ist, also mit den von ihm ausgehenden Richtungen $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ in einer Ebene liegt. Die Bedingungen für einen solchen Punkt sind mit zwei unbestimmten Faktoren:

$$(7) \qquad g(x_0\,y_0\,z_0) = 0.$$

$$(8) \quad \begin{cases} g_1(x_0\,y_0\,z_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = \sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2 \\ g_2(x_0\,y_0\,z_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = \sigma_1\beta_1 + \sigma_2\beta_2 \\ g_3(x_0\,y_0\,z_0) = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = \sigma_1\gamma_1 + \sigma_2\gamma_2. \end{cases}$$

Multipliziere ich diese Gleichungen erstens der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1, zweitens mit α_2, β_2, γ_2 und addiere sie jedesmal, so folgt nach (5) und (6)

$$(9) \quad \begin{cases} a_{14}\alpha_1 + a_{24}\beta_1 + a_{34}\gamma_1 = \sigma_1 \\ a_{14}\alpha_2 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\gamma_2 = \sigma_2. \end{cases}$$

$$\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 = a_{14}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + a_{24}(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) + a_{34}(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2)$$

$$\sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2 = a_{12}(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) + a_{24}(\beta_1^2 + \beta_2^2) + a_{34}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2)$$

$$\sigma_1 \gamma_1 + \sigma_2 \gamma_2 = a_{14}(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) + a_{24}(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2) + a_{34}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2).$$

Beachten wir nun dass:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0,$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0,$$

so folgt:

$$\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 = a_{14} - \alpha_3 (a_{14} \alpha_3 + a_{24} \beta_3 + a_{34} \gamma_3),$$
$$\sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2 = a_{24} - \beta_3 (a_{14} \alpha_3 + a_{24} \beta_3 + a_{34} \gamma_3),$$
$$\sigma_1 \gamma_1 + \sigma_2 \gamma_2 = a_{34} - \gamma_3 (a_{14} \alpha_3 + a_{24} \beta_3 + a_{34} \gamma_3),$$

oder mit Benutzung von (2)

$$\sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 = a_{14} - \frac{a_{11}}{\varrho_1^2}(a_{14} a_{11} + a_{24} a_{12} + a_{34} a_{13}),$$

$$\sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2 = a_{24} - \frac{a_{22}}{\varrho_2^2}(a_{14} a_{21} + a_{24} a_{22} + a_{34} a_{23}),$$

$$\sigma_1 \gamma_1 + \sigma_2 \gamma_2 = a_{34} - \frac{a_{33}}{\varrho_3^2}(a_{14} a_{31} + a_{24} a_{32} + a_{34} a_{33})$$

und mit Rücksicht auf (3)

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_1 \alpha_1 + \sigma_2 \alpha_2 = \dfrac{a_{14}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (a_{14} a_{11} + a_{24} a_{12} + a_{34} a_{13})}{A_{44}''} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} \\ \sigma_1 \beta_1 + \sigma_2 \beta_2 = \dfrac{a_{24}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (a_{14} a_{21} + a_{24} a_{22} + a_{34} a_{23})}{A_{44}''} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} \\ \sigma_1 \gamma_1 + \sigma_2 \gamma_2 = \dfrac{a_{34}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - (a_{14} a_{31} + a_{24} a_{32} + a_{34} a_{33})}{A_{44}''} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''} \end{cases}$$

Hiernach werden die Bedingungen (8)

$$(11)\quad \begin{cases} a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13}\,z_0 + a_{14} = \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} \\ a_{21}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23}\,z_0 + a_{24} = \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} \\ a_{31}\,x_0 + a_{32}\,y_0 + a_{33}\,z_0 + a_{34} = \dfrac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''} \end{cases}$$

Dies sind in laufenden Koordinaten $x_0\,y_0\,z_0$ die Gleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ von drei identischen Ebenen. Da wegen (9)

$$\alpha_1\,u_1 + \beta_1\,u_2 + \gamma_1\,u_3 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2\,u_1 + \beta_2\,u_2 + \gamma_2\,u_3 = 0$$

und die 3 Unterdeterminanten $\beta_1\,\gamma_2 - \beta_2\,\gamma_1 = \alpha_3$, $\alpha_1\,\gamma_2 - \alpha_2\,\gamma_1 = \beta_3$ und $\alpha_1\,\beta_2 - \beta_1\,\alpha_2 = \gamma_3$ nicht alle drei Null sind, so dass zwei u's durch das dritte ausgedrückt werden können.

Die Gleichung (7) kann auch geschrieben werden:

$$(\sigma_1\,\alpha_1 + \sigma_2\,\alpha_2)\,x_0 + (\sigma_1\,\beta_1 + \sigma_2\,\beta_2)\,y_0 + (\sigma_1\,\gamma_1 + \sigma_2\,\gamma_2)\,z_0 + a_{14}\,x_0 + a_{24}\,y_0 + a_{34}\,z_0 + a_{44} = 0$$

oder

$$(12)\quad \left\{\frac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} + a_{14}\right\} x_0 + \left\{\frac{\alpha_{31} - \alpha_{16}}{A_{44}''} + a_{24}\right\} y_0 + \left\{\frac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''} + a_{34}\right\} z_0 + a_{44} = 0.$$

Mit Hinblick auf (10) schreiben wir dies:

$$(13)\quad \begin{aligned} &\left\{2\,a_{14} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,a_{13})\right\} x_0 \\ &+ \left\{2\,a_{24} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23})\right\} y_0 \\ &+ \left\{2\,a_{34} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33})\right\} z_0 \\ &+ a_{44} = 0, \end{aligned}$$

und haben mit der ersten Gleichung (11) die Unterdeterminanten, welche zugleich die Linien-Koordinaten der Scheitellinie darstellen:

$$k \cdot q_{23} = \begin{vmatrix} a_{12} \\ 2\,a_{24} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) \\ a_{13} \\ 2\,a_{34} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{14} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14} \cdot 0 \cdot + a_{24}\,\alpha_{13} - a_{34}\,\alpha_{12} \right\}$$

$$= 2\,\alpha_{14}, \text{ da } \alpha_{12}\,\alpha_{13} \text{ etc. Null sind.}$$

$$k \cdot q_{31} = - \begin{vmatrix} a_{11} \\ 2\,a_{14} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,a_{13}) \\ a_{13} \\ 2\,a_{34} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{24} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14} \cdot 0 + a_{24}\,\alpha_{23} - a_{34}\,\alpha_{22} \right\} = 2\,\alpha_{24}.$$

$$k\,q_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ 2\,a_{14} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,a_{13}) \\ a_{12} \\ 2\,a_{24} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{34} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14}\,0 + a_{24}\,\alpha_{33} - a_{34}\,\alpha_{23} \right\} = 2\,\alpha_{34}.$$

Um q_{14}, q_{24}, q_{34} zu berechnen, Kombiniere ich (12) und (11)

$$k\,q_{14} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} - \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} \\ a_{14} + \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''}\, a_{44} & \end{vmatrix} = \alpha_{44} + \frac{(\alpha_{26} - \alpha_{35})^2}{A_{44}''^2}$$

$$k\,q_{24} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} - \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} \\ a_{24} + \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''}\, a_{44} & \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{45} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14}(\alpha_{34} - \alpha_{16}) - a_{24}(\alpha_{26} - \alpha_{35}) + \frac{(\alpha_{34} - \alpha_{46})(\alpha_{16} - \alpha_{35})}{A_{44}''} \right\}$$

$$k\,q_{34} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} - \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} \\ a_{34} + \dfrac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{46} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14}(\alpha_{25} - \alpha_{24}) - a_{34}(\alpha_{26} - \alpha_{35}) + \frac{(\alpha_{15} - \alpha_{24})(\alpha_{26} - \alpha_{35})}{A_{44}''} \right\}$$

Da es aber genügt, wenn wir nachweisen, dass die ersten drei Linienkoordinaten nicht Null sind unter den gemachten Voraussetzungen, so brauchen wir die letzten komplizierteren Ausdrücke nicht weiter zu beachten. Aus den Werten von q_{23}, q_{31}, q_{12} geht in der Tat hervor, dass sie von Null verschieden sein müssen, es wären nämlich sonst sämtliche Unterdeterminanten von A Null, was der Voraussetzung widerspräche.

Kombiniere ich die zweite und dritte Gleichung (11)

mit (13), so erhalte ich für jede Koordinate noch zwei analoge Werte, und zwar:

$$k\,q_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & \\ 2\,a_{24} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) & \\ & a_{23} \\ & 2\,a_{34} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{32}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{15} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ - a_{14}\,\alpha_{13} + a_{24}\cdot 0\cdot + a_{34}\,\alpha_{11} \right\} = 2\,\alpha_{15}.$$

$$k\,q_{31} = - \begin{vmatrix} a_{21} & \\ 2\,a_{14} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,a_{33}) & \\ & a_{23} \\ & 2\,a_{34} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{25} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ + a_{14}\,a_{23} + a_{24}\,0 - a_{34}\,\alpha_{12} \right\} = 2\,\alpha_{25}.$$

$$k\,q_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & \\ 2\,a_{14} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,\alpha_{13}) & \\ & a_{22} \\ & 2\,a_{24} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{35} - \frac{1}{A_{44}''}(- a_{14}\,\alpha_{33} + a_{24}\cdot 0 + a_{34}\,\alpha_{13}) = 2\,\alpha_{35}.$$

$$q\,k_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} - \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} \\ a_{14} + \dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{45} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14}\,(\alpha_{34} - \alpha_{16}) - a_{24}\,(\alpha_{26} - \alpha_{35}) + \frac{(\alpha_{26} - \alpha_{35})\,(\alpha_{34} - \alpha_{16})}{A_{44}''} \right\}$$

$$k\,q_{24} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} - \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} \\ a_{24} + \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''}\, a_{44} & \end{vmatrix} = \alpha_{55} + \frac{(\alpha_{34} - \alpha_{16})^2}{A_{44}''^2}$$

$$k\,q_{34} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} - \dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} \\ a_{34} + \dfrac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''}\, a_{44} & \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_{65} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{24}\,(\alpha_{15} - \alpha_{24}) - a_{34}\,(\alpha_{34} - \alpha_{16}) + \frac{(\alpha_{15} - \alpha_{24})\,(\alpha_{34} - \alpha_{16})}{A_{44}''} \right\}$$

Aus $11_{,3}$ und 13 folgt:

$$k\,q_{23} = \begin{vmatrix} a_{32} & \\ 2\,a_{24} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) & \\ a_{33} & \\ 2\,a_{34} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33}) & \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{16} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,\alpha_{12} - a_{24}\,\alpha_{11} + a_{34} \cdot 0) = 2\,\alpha_{16}.$$

$$k\,q_{31} = -\begin{vmatrix} a_{31} & \\ 2\,a_{14} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{21} + a_{34}\,a_{13}) & \\ a_{33} & \\ 2\,a_{34} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{31} + a_{24}\,a_{32} + a_{34}\,a_{33}) & \end{vmatrix}$$

$$= 2\,\alpha_{26} - \frac{1}{A_{44}''}(-a_{14}\,\alpha_{22} + a_{24}\,\alpha_{12} + a_{34} \cdot 0) = 2\,\alpha_{26}.$$

$$k\,q_{12} = \begin{vmatrix} a_{31} & \\ 2\,a_{14} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{11} + a_{24}\,a_{12} + a_{34}\,a_{13}) & a_{32} \\ & 2\,a_{24} - \dfrac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{21} + a_{24}\,a_{22} + a_{34}\,a_{23}) \end{vmatrix}$$

$$= a_{36} - \frac{1}{A_{44}''}(a_{14}\,a_{23} - a_{24}\,a_{13} + a_{34}\cdot 0) = 2\,a_{36}.$$

$$k\,q_{14} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} - \dfrac{a_{15} - a_{24}}{A_{44}''} \\ a_{14} + \dfrac{a_{26} - a_{35}}{A_{44}''}\,a_{44} & \end{vmatrix}$$

$$= a_{46} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{14}\,(a_{15} - a_{24}) - a_{34}\,(a_{26} - a_{35}) + \frac{(a_{26} - a_{35})\,(a_{15} - a_{24})}{A_{44}''}\right\}$$

$$k\,q_{24} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} - \dfrac{a_{15} - a_{24}}{A_{44}''} \\ a_{24} + \dfrac{a_{34} - a_{16}}{A_{44}''}\,a_{44} & \end{vmatrix}$$

$$= a_{56} - \frac{1}{A_{44}''}\left\{ a_{24}\,(a_{15} - a_{24}) - a_{34}\,(a_{34} - a_{16}) + \frac{(a_{34} - a_{16})\,(a_{15} - a_{24})}{A_{44}''}\right\}$$

$$k\,q_{34} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} - \dfrac{a_{15} - a_{24})}{A_{44}''} \\ a_{34} - \dfrac{a_{15} - a_{24}}{A_{44}''}\,a_{44} & \end{vmatrix}$$

$$= a_{66} + \frac{(a_{15} - a_{24})^2}{A_{44}''^2}$$

Da die ersten drei aller dieser zusammengehörenden Werte nie zugleich Null sein können, so sehen wir, dass der parabolische Cylinder stets eine endliche bestimmte Scheitellinie besitzt.

Am Schlusse dieser Arbeit ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Staude, für die gütige Unterstützung, die er bei Anfertigung dieser Arbeit erwies, meinen aufrichtigen Dank abzustatten.